

北京大学物理学丛书

The Series of Advanced Physics of Peking University

李代数李超代数及在物理中的应用

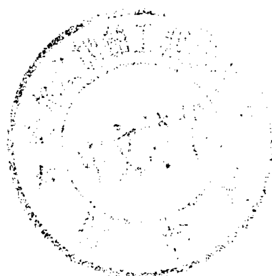
孙洪洲 韩其智 编著

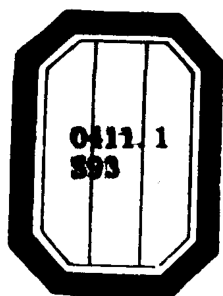
北京大学出版社 PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学物理学丛书

李代数李超代数及在物理中的应用

孙洪洲　韩其智　著







北京大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

李代数李超代数及在物理中的应用/孙洪洲,韩其智著.
北京：北京大学出版社,1999.5
(北京大学物理学丛书)
ISBN 7-301-04129-2

Ⅰ.李… Ⅱ.①孙… ②韩… Ⅲ.李代数-应用-物理
Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 13475 号

书　　名：李代数李超代数及在物理中的应用
著作责任者：孙洪洲　韩其智
责 任 编 辑：周月梅
标 准 书 号：ISBN 7-301-04129-2/O·440
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.en/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　14.75 印张　360 千字
1999 年 5 月第一版　　1999 年 5 月第一次印刷
印　　数：0001～4000 册
定　　价：28.00 元

The Series of Advanced Physics of Peking University

Lie Algebras and Lie Superalgebras and Their Applications in Physics

Sun Hongzhou
Han Qizhi

Peking University Press
Beijing

内 容 提 要

本书主要介绍用张量基方法求李代数和李超代数的表示，并将张量基方法用于求转动不变的全同粒子体系波函数．还简单介绍了李代数和李超代数的基本知识以方便读者查找．用类似于张量基方法，从点群生成元及定义关系出发，得到其表示和约化系数．

为了起到帮助读者较快进入有关方面科研的作用，本书在实例选择上由浅入深，尽量使读者容易掌握．凡具有基本群论知识的读者均适于读本书．

本书共分七章，包括介绍李代数和李超代数的基本知识，李代数 $su(n)$ 和 $o(n)$ 的表示，李超代数 $A(n,1)$ 系列和 $B(0,1), B(1,1)$ 等的表示，转动不变的全同粒子体系波函数的算法，点群及其约化系数的计算方法．

此书可以作为理论物理研究生和工作者的参考书，对理论化学工作者也有一定的参考价值．

《北京大学物理学丛书》
编委会名单

前　言

物理学是自然科学的基础，是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科。几十年来，在生产技术发展的要求和推动下，人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破。物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展，丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握，促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步。物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

为适应现代化建设的需要，为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平，我们决定推出《北京大学物理学丛书》，请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍，为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习，开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材。

本丛书分两个层次。第一个层次是物理系本科生的基础课教材，这一教材系列，将在几十年来几代教师，特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上，力求深入浅出、删繁就简，以适于全国大多数院校的

物理系使用。它既吸收以往经典的物理教材的精华，尽可能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法；同时又注入科技发展的新观点和方法，介绍物理学的现代发展，使学生不仅能掌握物理学的基础知识，还能了解本学科的前沿课题和研究动向，提高学生的科学素质。第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作。这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题，介绍该学科方向的基本内容，力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果。学术专著首先着眼于物理学的各分支学科，然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科。

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者，又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用。

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997年3月

Preface

Physics is the foundation of natural sciences,a leading discipline of studying structures of matter and basic laws of motion. For several decades,driving by the demands of developing technology,the breakthrough in the studies of physical phenomenon and the laws of physics never end. During this period,all branches of Physics grew very fast and our knowledge of the basic laws governing the motion of the physical world was highly enriched. The growing of physics accelerated the progress of many physics related areas and technologies. The development of physics provided grounds and guidance for the birth and the growth of those new branches of physics,related areas and new technologies.

In order to catch up the main stream of the modernization and to give an impetus to scientific research and to improve teaching of physics in China,we decided to publish "*The Series of Advanced Physics of Peking University*". We invited those distinguished physicists and professors who worked in the frontier of physics to give series introductions to all branches of modern physics and recent developments in these fields. This series,as a consequence,provides textbooks and references for physicists and physics students in their studies of all branches of physics,related areas and technologies.

This series is divided into two sub-series of different levels, the first sub-series includes the textbooks of undergraduate

physics written by experienced teachers in Peking University in past decades. These textbooks were written concisely with deep insights and easier expressions, which adopt essences of physics textbook classics, explain fundamental concepts, laws and methods of physics in a systematic and rigorous way. In addition, these textbooks properly introduced the new approaches and the latest developments of physics for educational purposes. This sub-series is suitable for teaching of undergraduate physics for most universities and institutes in China. The second sub-series includes graduate textbook, references and academic writings. This sub-series focuses on the latest developments and accomplishments in the active subjects of relevant research with international interests and introductions to those of fast developing research fields. The topics of academic writings mainly cover all branches of physics, but it will be generalized to closely related areas.

We wish the publication of this series could provide an opportunity for leading physicists and physics professors in China to show their fruitful accomplishments to general audience and to give an impetus to teaching and research in physics.

Editorial board of

"The Series of Advanced Physics of Peking University"

March 1997

序

世纪之交的物理学

20世纪即将过去。物理学的革命，这场革命推动的整个自然科学和应用技术的伟大变革，以及这些变革对人类社会的影响，将作为这个世纪的一个重要标志而载入史册。这段令人神往的历史，给正处在世纪之交的我们以什么样的启示呢？

首先的启示是作为研究物质结构和运动的基本规律的物理学，总是生机勃勃、不断地开辟自己前进的道路的。1803年道尔顿提出了近代的原子论，认为世间万物都是由几十种不同种类的原子（那时只认识到三十来种）组成的。经过近一个世纪多方面的研究和争论，科学界接受了和发展了这个学说。到19世纪60年代，元素的数目增到六十多种，而且还认识到不同元素的性质是有内在联系的，门捷列夫的周期律描述了这种联系。19世纪末，物理学家们发现了电子、α粒子、放射性、X射线……发现原子是可以改变的，原子不是物质构成的最小单元。20世纪初卢瑟福建立了原子结构的“行星”模型。探讨原子结构模型和经典物理学之间的矛盾，导致了量子力学的诞生，产生了现代原子、分子物理、凝聚态物理、原子核物理……历史也许有某种类似性。在这个世纪之交，物理学又

正在进入一个新的层次。本世纪50年代,人们找到作为构成物质的基石的基本粒子有三十来种,也认识到它们之间的相互作用和相互转化。探索这些“基本”粒子的更深层次的构造的努力,近三十年来取得十分辉煌的成就。三代夸克和三代轻子的粒子模型、电弱统一理论和量子色动力学,这被称作粒子物理的标准模型的建立以及它在各方面的成功,正是标志着物理学正在进入物质世界的一个更深的层次,毫无疑问这将是物理学历史上一个具有划时代的意义的大事。但是,大多数的物理学家都会同意,从本质上说,目前的标准模型还是一个唯象的模型。在欢呼它取得的多方面的胜利时,也要看到同时提出了一系列带本质性的问题。也许可以说,进入这个新层次将带来的最本质的新的物理,还没有来到我们中间。19世纪末的物理学家没能猜测到,进入比原子更深层次的探索,会在什么时候和在哪点上带来新的物理,20世纪末的人们也不能奢望会比前辈高明多少!

20世纪物理学的革命,表现出人类理性思维的伟大胜利。狭义相对论,特别是广义相对论,以它深邃的思考,严整的形式和美丽的表述,震撼着一代又一代的物理学工作者的心灵。但是,爱因斯坦也在他那无与伦比的思考导致的宇宙模型面前困惑了。感谢近四十多年来一大批物理学家和天文学家辛勤的努力和非凡的勇气,这个难以想象的革命性的关于宇宙的概念和图象建立起来了,并得到科学界多数人的认同。在大致一百五十多亿年前,宇宙从一个具有无限大的密度和具有无限大的时空曲率

的点开始了。人们猜想，在宇宙膨胀、密度和温度降低中，到 10^{-44}秒时，重力相互作用和其他相互作用分离开来；到 10^{-36}秒时，强相互作用和电弱相互作用分离；直到 10^{-10}秒时，弱相互作用才与电磁相互作用分离，世界变成了我们现在所处的有四种基本相互作用的世界。到 10^{-6}秒时，夸克开始结合成强子，也许应当说，只有从此之后的物理才是当代物理学家可以比较有把握来谈论的。直到 10^{12}秒(也就是三万多年)后，原子才开始出现。这样一个综合了亚核子尺度(小于 10^{-14}厘米)的物理和宇观尺度(大于 10^{24}厘米)的物理的宇宙演化模型的建立，可以说是人类认识史上一个最具有革命性的、划时代的伟大事件，当代人还难以全部理解它的意义。这个宇宙学的标准模型和近年来天体物理学家取得的辉煌的成就，在物理学的面前提出了十分严峻的具有本质的挑战。如何理解这样有限而无界的时空和它的奇点？什么是在这样演化中的物质和运动规律？为什么宇宙学中有那么多“巧合”？……总之，面对着如此壮观而又如此神奇的宇宙之谜，除了由衷的赞美和敬佩，人们不禁想起爱因斯坦的话：“自然界最不可理解的就是它竟然可以理解！”

本世纪物理学的发展给我们的又一个教益是：物质世界是有层次的，反映物质世界的物理学规律也是有层次的。每一层次的物理都植根于更深层次的物理学。但是，每个层次的物理都是在真实的意义上不可穷尽的。在大自然千姿百态的丰富性面前，那些断言某某学科将不会有什么发展的说法总是被事实所粉碎的。经典力学、经

典电动力学并不因为量子力学、量子电动力学的发展而被排斥出物理学，近年来我们还不停地学习它们新的、有深刻意义的进展。光学和凝聚态物理学半个世纪来的巨大的、令人应接不暇的发展提供了最能说服人的例子。也许人们常常由于赞颂它们在实际应用上的威力的同时，不够强调它们在物理学学科上的意义。但如果我们想到在当代粒子物理和宇宙学中最重要的观念，如相变、对称性破缺、拓扑性缺陷、红外发散等等，都首先来自凝聚态物理学，而当代凝聚态物理又都广泛地而且本质地使用量子场论的语言和技术时，我们就会确信物理学的丰富性、多样性和统一性，"只有一个物理学"！

在20世纪，物理学的基本概念和技术已被应用到所有的自然科学领域。物理学与其他自然科学学科之间的边缘领域，一定意义上是当代自然科学中最富于获得丰硕成果的机遇的领域。边缘领域的发展，又反过来丰富、边深和支持了物理学本身的发展。量子力学和现代物理实验技术的应用，大大推进了现代化学的发展。对分子结构、性能和反应机理的研究，又丰富和推动了现代物理的进步。而且，如果没有现代化学的支撑，现代物理学中好些分支学科都不能产生和发展。地球科学、生命科学与物理学的边缘领域的发展，也将会是类似的情景。特别令人感到兴奋的一个新事物是近二三十年复杂性科学的发展。数学、物理学，特别是物理学与化学、地球科学、生命科学、各种应用技术科学的边缘领域研究的发展，都使人们相信，在复杂性（多维度，多组元、非线性，非平衡和开

放的)系统的结构、性能和演化中,有一些具有普遍性的运动规律和运动模式。人们自然回想到,开始于上一世纪中叶的研究能量守恒和转化的热力学和分子运动论的发展,本世纪统计物理和涨落理论的发展。有理由相信一门有重要的基础科学意义的学科,复杂性物理正在形成。它现在已经显出可能对物理学中一些最基础的问题,如必然性和随机性,无序化的倾向和有序结构的生成,不同层次的结构的自相似性等,作出有深刻物理意义的回答。也许,历史会表明,这也是人类认识史上又一个划时代的事物,同时,无疑地会对化学、地球科学、生命科学、认知科学和各种应用技术发生巨大的影响。

物理学作为一门最基础的自然科学,它的发展动力是深深地植根于人类对真理的非功利的追求。但是,历史的发展将越来越有力地证明,正是这种非功利的追求给人类带来最大的收益。本世纪发生的主要源于物理学的进展的技术革命,就是最有说服力的例子。当代技术进步的主要推动力来自纯学科性的基础研究。研究室和实验室中纯学科性的研究转变为重要的应用技术,实际生产和社会发展中遇到的问题转化为有基础学科意义的研究课题,两者关系愈来愈密切,周期愈来愈短。与之相应,在现代,杰出的基础科学研究人材和优秀的应用技术开发人材在科学素质上的要求变得更加一致了。在世纪之交,无论是制造业还是服务业,也无论是材料、信息、能源、交通、环境等技术部门,都在呼唤着新的技术变革,而认真考察就会发现,多数这些变革都主要基于物理学近年的

进展。21 世纪物理学毫无疑问仍是技术进步的主要源泉。

物理学的发展从来就对人类社会思想、文化发生巨大影响。20 世纪的物理学革命就更是这样。人类社会进步的一个主要动力便是科学精神，现代科学精神的典范和集中的反映就是现代物理学。我国是一个文明古国，在历史上曾经对人类的文化和科学发展做出过光辉的贡献。但是，我国接受近代科学的时间还很短，现代科学的精神实质和思维方式扎根我国还要做艰苦的努力。有些人跟着西方一些比较浅薄的哲学流派的后面，宣扬一些贬低和反对现代科学精神的言论，甚至把当代社会中由于社会矛盾而造成的后果，都归罪到现代科学精神上。这当然是完全错误的。以现代物理学为代表的科学精神，是人类进步的一面旗帜，它将高高飘扬在未来的岁月中。

当我们站在新世纪的门槛上，回顾 20 世纪物理学的辉煌时，会更加确信，在 21 世纪物理学将会同样辉煌。那些有幸进入物理学工作者的行列的年青朋友，历史将会证明，你们的选择是完全正确的。

中国科学院院士 甘子钊

1997 年 4 月

作者前言

对称性在物理学、化学等科学研究中至关重要. 群论作为研究对称性的工具, 也日益受到人们的重视, 求群表示已成为数学物理的一个重要方面.

我们通过多年的科研实践, 认识到用张量基方法求半单李代数的表示是相当有效的. 其应用范围相当广泛, 如用于李代数的紧和非紧实型、有限维和无限维表示, 也可以用于求基本经典李超代数的表示. 如将其用于求转动不变的全同粒子体系波函数, 可以得到显含辛弱数母分系数的递推公式, 从而较好地改进了计算.

现有机会在北京大学出版社支持下, 将张量基方法总结成书, 纳入《北京大学物理学丛书》, 实是一件幸事. 此书可以作为理论物理工作者的参考书, 起到帮助读者较快进入有关方面科研第一线的作用. 书中的研究成果得到了国家自然科学基金的资助, 其中部分成果还得到国家教委博士点学科专项基金等的资助.

本书共分七章, 为方便读者, 在第一章和第四章介绍李代数和李超代数的基本知识, 一般不给出数学的严格证明. 第二章和第三章给出李代数 $su(n)$ 和 $o(n)$ 的表示. 第五章给出部分李超代数 $A(m,n)$ 系列和部分 $B(m,n)$ 的表示. 第六章介绍转动不变的全同粒子体系波函数的算法. 第七章介绍点群及其约化系数, 这本不属于本书范围, 但若从生成元及定义关系出发, 用类似于张量基方法, 可以方便求出其表示和约化系数. 全书重点在介绍张量基方法, 而不是有关方面的全面总结.

本书的大部分理论计算是由孙洪洲首先给出, 书稿由韩其智执笔. 由于作者水平和时间限制, 错误和不妥之处难免, 恳请读者予以指正.

最后作者愿借此机会，深切怀念养育我们的父母和教导过我们的师长，感谢关心和帮助过我们的同行和与我们进行过有益讨论的同行. 特别是和我们一起工作过的同事们，他们对本书的贡献是不言而喻的. 高崇寿教授和周月梅编审仔细阅读了本书并提出了许多宝贵意见，使我们受益匪浅，程希有编审对本书的排版进行了热情耐心的帮助，谨向他们致以衷心的感谢.

孙洪洲　　韩其智

1999 年 4 月于北京

目　　录

CONTENTS

第一章　李代数及其表示

本章介绍李代数和李代数表示的基本概念，第一节引入李代数，第二节讨论复半单李代数和单李代数，第三节讨论实单李代数，第四节讨论李代数的表示，第五节讨论用张量基求表示并给出简单实例 $o(3)$. 第六节讨论 $sp(4)$ 的不可约表示.

1.1　李代数基础

设 $\mathfrak{g}$ 是数域 K 上定义有乘法的线性空间，对任意 $x,y,z\in\mathfrak{g}$, $c\in K$ 满足

(1) 分配律,

$$
\begin{aligned}
(x+y)z &= xz+yz,\\
z(x+y) &= zx+zy;
\end{aligned}
$$

(2) 数乘交换律,

$$
c(xy)=(cx)y=x(cy),
$$

则 $\mathfrak{g}$ 称为代数. 线性空间的维数称为代数的维数.

例　n 维线性空间 V 上线性变换 $L(V,V)$，定义两个线性变换的乘法为连续两次线性变换，则 $L(V,V)$ 构成代数. $L(V,V)$ 是 n^2 维的.

李代数 $\mathfrak{g}$ 是数域 K 上的代数，若其乘法满足

(1) 双线性,

$$
\begin{aligned}
[cx+c'y,z] &= c[x,z]+c'[y,z],\\
[z,cx+c'y] &= c[z,x]+c'[z,y];
\end{aligned}
$$

(2) 反对易性,

$$[x,y]=-[y,x];$$

(3) Jacobi 恒等式,

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0;$$

则称 $\mathfrak{g}$ 为李代数. 其中符号 [,] 表示 $\mathfrak{g}$ 的乘法, $x,y,z\in\mathfrak{g}$, $c,c'\in K$. 李代数的乘法也简称为李积. 反对易性有时也可以换成幂零性 $[x,x]=0$, 它们是等价的. 李代数的维数也就是线性空间 $\mathfrak{g}$ 的维数.

如对任意 $x,y\in\mathfrak{g}$, 李积满足 $[x,y]=0$, 则称 $\mathfrak{g}$ 是 Abelian 李代数或交换李代数.

设 $\mathfrak{g}'$ 为代数, 用 xy 表代数 $\mathfrak{g}'$ 的乘法, 对 $x,y\in\mathfrak{g}'$. 可以通过下对易关系定义新的乘法 $[x,y]$,

$$[x,y]=xy-yx, \tag{1.1}$$

则诱导出李代数 $\mathfrak{g}$. 显然 $\mathfrak{g}$ 满足双线性, 反对易性和 Jacobi 恒等式. 称李代数 $\mathfrak{g}$ 是从代数 $\mathfrak{g}'$ 诱导而来. 所以说由代数的乘法可通过对易关系诱导出李代数.

由李代数 $\mathfrak{g}$ 是线性空间, 取其基为 $(x_1,x_2,\cdots,x_l)$, 取重复指标表示求和, 则 $\mathfrak{g}$ 的乘法可以用基的李积写出

$$[x_i,x_j]=c^k_{i\,j}x_k. \tag{1.2}$$

系数 $c^k_{i\,j}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的结构常数. 结构常数的具体数值与基有关. 李积的反对易性和 Jacobi 恒等式要求

$$\begin{aligned}&c^k_{i\,j}+c^k_{j\,i}=0,\\&c^j_{m\,n}c^i_{j\,k}+c^j_{n\,k}c^i_{j\,m}+c^j_{k\,m}c^i_{j\,n}=0.\end{aligned} \tag{1.3}$$

例 一般线性李代数 $gl(n,C)=gl(V)$, 是从 n 维复线性空间 V 上线性变换代数 $L(V,V)$ 诱导出的李代数. 对 $x,y\in L(V,V)$, 定义

$gl(n,C)$ 的李积为 $[x,y]=xy-yx$. $gl(n,C)$ 是 n^2 维的，它在李代数中起相当重要的作用.

用 $n\times n$ 维矩阵表示 V 上线性变换，可取 $gl(n,C)$ 的基为 E_{ij}，E_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素为 0 的 $n\times n$ 维矩阵. $gl(n,C)$ 的乘法可以用下对易关系表示

$$[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{j\,k}E_{il}-\delta_{i\,l}E_{kj}. \tag{1.4}$$

非零结构常数有 $c_{ij\,kl}^{il}=\delta_{j\,k}$ 和 $c_{ij\,kl}^{kj}=-\delta_{i\,l}$.

李代数的同构与同态. 若有线性映射 Φ 将李代数 $\mathfrak{g}$ 映射到李代数 $\mathfrak{g}'$, $\Phi:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}'$, 且保持李代数的运算规律不变, 即向量数乘, 加法和李积不变，也就是对 $x,y\in\mathfrak{g}$, $c,c'\in K$ 有

$$\begin{aligned}&\Phi(cx+c'y)=c\Phi(x)+c'\Phi(y),\\&\Phi([x,y])=[\Phi(x),\Phi(y)],\end{aligned} \tag{1.5}$$

则称 Φ 是同态映射，称李代数 $\mathfrak{g}$ 与李代数 $\mathfrak{g}'$ 同态.

如从李代数 $\mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{g}'$ 的同态映射是一一的，则称李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 同构. 两个同构的李代数满足完全一样的运算规律，所以从抽象的数学角度看，它们是完全一样的.

如式 (1.3) 所述，李代数 $\mathfrak{g}$ 在基 $(x_1,x_2,\cdots,x_l)$, 下，可以用基的李积表示出来. 据此可以定义 $\mathfrak{g}$ 的内导子，对 $x,y\in\mathfrak{g}$，有 $\mathrm{ad}(x)y=[x,y]$，具体地

$$\mathrm{ad}(x_i)x_j=[x_i,x_j]=c_{i\,j}^{k}x_k, \tag{1.6a}$$

应用李积的性质可以证明 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 与 $\mathfrak{g}$ 同态. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, 也称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示. 伴随表示矩阵的 k 行 j 列元素为

$$\mathrm{ad}(x_i)_j^k=c_{i\,j}^{k}. \tag{1.6b}$$

设 $\mathfrak{g}$ 为李代数， $x,y,z\in\mathfrak{g}$, $c,c'\in K$, 定义其 Killing 型为

$$(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)). \tag{1.7a}$$

它是 $\mathfrak{g}$ 上的双线型，即 $(cx+c'z,y)=c(x,y)+c'(z,y)$，满足对称性 $(x,y)=(y,x)$，且具有不变性 $([x,y],z)+(y,[x,z])=0$.

取 $\mathfrak{g}$ 的基为 $(x_1,x_2,\cdots,x_l)$ 时，Killing 型可以用矩阵 $(g_{i\,j})$ 描述，其矩阵元为

$$g_{i\,j}=g_{j\,i}=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x_i)\mathrm{ad}(x_j))$$
$$=\sum_{k\,l}c_{i\,l}^{k}c_{j\,k}^{l}. \tag{1.7b}$$

任意 $x\in gl(n,C)$ 可以写成 $x=\sum_{i\,j}x_{i\,j}E_{i\,j}$，利用基之间的对易关系式 (1.4)，可以求出 x 的伴随表示的非零矩阵元为 $\mathrm{ad}(x)_{l\,j,\,i\,j}=x_{l\,i}$，$l\neq i$，$\mathrm{ad}(x)_{i\,l,\,i\,j}=-x_{j\,l}$，$l\neq j$ 和 $\mathrm{ad}(x)_{i\,j,\,i\,j}=x_{i\,i}-x_{j\,j}$，从而直接计算出 $x,y\in gl(n,C)$ 的 Killing 型为

$$(x,y)=2n\mathrm{tr}(xy)-2\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y). \tag{1.8}$$

设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间，对任意 $x,y\in\mathfrak{h}$，在 $\mathfrak{g}$ 的李积下有 $[x,y]\in\mathfrak{h}$，则称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李子代数，或简称子代数. 显然，任何李代数 $\mathfrak{g}$ 均以其自身 $\mathfrak{g}$ 和零空间 $\{0\}$ 为其子代数，一般讲子代数并不包含这种显然情况.

如特殊线性李代数 $sl(n,C)=\{x\in gl(n,C)|\mathrm{tr}(x)=0\}$ 是一般线性李代数 $gl(n,C)$ 的子代数，它是 n^2-1 维的，以 $n\times n$ 维的单位矩阵 E_n 为基的子空间 $k=\{cE_n|c\in C\}$ 也是 $gl(n,C)$ 的子代数，k 是一维李代数.

设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，而且对 $x\in\mathfrak{h}$,$y\in\mathfrak{g}$ 满足 $[x,y]\subset\mathfrak{h}$ ，即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的不变子代数，则称 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想子代数，也简称为理想. 显然任何李代数 $\mathfrak{g}$ 均以其自身 $\mathfrak{g}$ 和零空间 $\{0\}$ 为其理想，一般讲理想并不包含这种显然情况.

设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想，对 $x\in\mathfrak{g}$，定义 x 的 mod $\mathfrak{h}$ 同余类为 $\overline{x}=x+\mathfrak{h}$. $\mathfrak{g}$ 中所有 mod $\mathfrak{h}$ 同余类，组成商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. 对 $\overline{x},\overline{y}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，定义商空间的李积为

$$[\overline{x},\overline{y}]=\overline{[x,y]},$$

则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是李代数，称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的商代数.

如 $gl(n,C)/k = sl(n,C)$, 而 $gl(n,C)/sl(n,C) = k$.

设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想，并且任意 $x \in \mathfrak{g}$, 可以唯一表成 $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in \mathfrak{g}_1$, $x_2 \in \mathfrak{g}_2$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和，记为 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

如特殊线性李代数 $sl(n,C)$ 和一维李代数 k 都是一般线性李代数 $gl(n,C)$ 的理想. 并且 $gl(n,C) = sl(n,C) \oplus k$.

如李代数 $\mathfrak{g}$ 除 $\{0\}$ 和 $\mathfrak{g}$ 自身之外，不含有其他理想，则称 $\mathfrak{g}$ 为单李代数. 根据上定义，一维李代数 k 是单李代数，如除去此例外后，所有交换李代数都不是单李代数. 特殊线性李代数 $sl(n,C)$ 是单李代数，而一般线性李代数 $gl(n,C)$ 不是单李代数.

如李代数 $\mathfrak{g}$ 除 $\{0\}$ 和 $\mathfrak{g}$ 自身之外，不含有其他交换理想，则称 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数. 显然除一维李代数外，单李代数都是半单的，但半单李代数并不一定是单的.

如李代数 $\mathfrak{g}$ 半单，则有

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}.$$

否则商代数 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零交换理想.

可以证明李代数 $\mathfrak{g}$ 半单的充分必要条件是： $\mathfrak{g}$ 可以分解为有限个单李代数的直和，并且这种分解是唯一的，即

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m,$$

其中 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_m$ 都是单李代数.

由此可以看出研究单李代数是研究半单李代数的基础.

可以证明李代数 $\mathfrak{g}$ 半单的充分必要条件是其 Killing 型 $(g_{i\,j})$ 不退化，即

$$\det|g_{i\,j}| \neq 0.$$

这对判断一个李代数是否半单很有用.

李代数 $\mathfrak{g}$ 的降中心链 $\mathfrak{g}^{[0]},\mathfrak{g}^{[1]},\mathfrak{g}^{[2]},\cdots,\mathfrak{g}^{[k]},\cdots$ 为 $\mathfrak{g}^{[0]}=\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}^{[1]}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{[0]}]$，$\mathfrak{g}^{[2]}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{[1]}],\cdots$，$\mathfrak{g}^{[k]}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{[k-1]}],\cdots$. 当有正整数 n 使 $\mathfrak{g}^{[n]}=\{0\}$，则称 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的导来链 $\mathfrak{g}^{(0)},\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(2)},\cdots,\mathfrak{g}^{(k)},\cdots$ 为 $\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g}^{(0)},\mathfrak{g}^{(0)}]$，$\mathfrak{g}^{(2)}=[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(1)}],\cdots$，$\mathfrak{g}^{(k)}=[\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}],\cdots$. 当有正整数 n 使 $\mathfrak{g}^{(n)}=\{0\}$，则称 $\mathfrak{g}$ 为可解李代数.

显然幂零李代数一定可解，而可解李代数却不一定幂零. 幂零李代数的子代数是幂零的，可解李代数的子代数是可解的. 幂零李代数的同态象是幂零的，可解李代数的同态象是可解的. 半单李代数既不是幂零的，也不是可解的.

记 $\mathfrak{D}g=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，则李代数 $\mathfrak{g}$ 可解的充分必要条件是 $\mathfrak{D}g$ 为幂零李代数.

1.2 复半单和复单李代数

设 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{h}$ 是其幂零子代数，$\mathfrak{g}$ 可以分解为

$$\mathfrak{g}=\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}^{\alpha}, \tag{1.9a}$$

其中

$$\mathfrak{g}^{\alpha}=\{x|x\in\mathfrak{g},[H,x]=\alpha(H)x,H\in\mathfrak{h}\}. \tag{1.9b}$$

α 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的复线性函数，称为 $\mathfrak{g}$ 对子代数 $\mathfrak{h}$ 的一个根. 用 Δ 代表根的全体. $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 具有根 α 的子空间.

这分解有以下性质:

(1) 对 $\alpha,\beta\in\Delta$, 如 $\alpha+\beta\in\Delta$, 有

$$[\mathfrak{g}^{\alpha},\mathfrak{g}^{\beta}]\subset\mathfrak{g}^{\alpha+\beta},$$

如 $\alpha+\beta\notin\Delta$, 则

$$[\mathfrak{g}^{\alpha},\mathfrak{g}^{\beta}]=0;$$

(2) 如 $\alpha+\beta\neq 0$, 则 $(\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^\beta)=0$;

(3) $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}^0$, 即 $\mathfrak{h}$ 包含在 $\mathfrak{g}$ 的根为零的子空间内.

如 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0$, 就称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 所以说 Cartan 子代数是 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零子代数. 可以证明李代数的 Cartan 子代数一定存在.

设 $\mathfrak{g}$ 是 n 维半单李代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{h}$ 的维数 r 称为 $\mathfrak{g}$ 的秩. 则 $\mathfrak{g}$ 可作 Cartan 分解,

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}^\alpha, \tag{1.10}$$

其中 Σ 表 $\mathfrak{g}$ 的非零根的全体, 称为 $\mathfrak{g}$ 的根系. 注意 $\mathfrak{g}$ 是 Cartan 子代数与不同根子空间的直和. 并且满足:

(1) $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的交换子代数, Killing 型对 $\mathfrak{h}$ 的限制是非退化的.

(2) $\mathfrak{g}$ 有 r 个线性无关的根, 而且每个非零根都是单根, 即根子空间 $\mathfrak{g}^\alpha$ 都是一维的.

(3) 若 $\alpha\in\Sigma$, 必有 $-\alpha\in\Sigma$. 而且若 $k\alpha\in\Sigma$, 只可能 $k=\pm1$.

(4) 对 $\alpha,\beta\in\Sigma$, 若 $\alpha+\beta\in\Sigma$, 则 $[\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^\beta]=\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$; 若 $\alpha+\beta\notin\Sigma$, 则 $[\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^\beta]=0$.

取 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的基为 $\{H_1,H_2,\cdots,H_r\}$. 根子空间 $\mathfrak{g}^\alpha$ 的基为 E_α, 取 $\mathfrak{g}$ 基的顺序为 $\{H_1,H_2,\cdots,H_r,E_\alpha,E_{-\alpha},E_\beta,E_{-\beta},\cdots,\}$, 称为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan-Weyl 基. 设 $\alpha,\beta\in\Sigma$. 则 $\mathfrak{g}$ 的乘法可由下对易关系表出:

$$\begin{aligned}
&[H_i,H_j]=0,\\
&[H_i,E_\alpha]=\alpha(H_i)E_\alpha,\\
&[E_\alpha,E_\beta]=\begin{cases} N_{\alpha\,\beta}E_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta\in\Sigma;\\ \quad 0, & \alpha+\beta\notin\Sigma,\end{cases}\\
&[E_\alpha,E_{-\alpha}]=C^i_{\alpha\,-\alpha}H_i.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 $(g_{l\,m})$ 对 $\mathfrak{h}$ 的限制 $(g_{i\,k})$ 为

$$g_{i\,k}=\sum_{\alpha\in\Sigma}\alpha(H_i)\alpha(H_k), \tag{1.12a}$$

其中 $i,k=1,2,\cdots,r,\ l,m=1,2,\cdots,r,r+1,\cdots,n.$ 而且

$$\det|g_{l\,m}|=\det|g_{i\,k}|\neq 0. \tag{1.12b}$$

设 $(g_{i\,k})$ 的逆为 $(g^{i\,k})$, 可取结构常数

$$C^i_{\alpha\,-\alpha}=\sum_k g^{i\,k}\alpha(H_k). \tag{1.13}$$

若存在非零根系列 $\beta+l\alpha,\beta+(l-1)\alpha,\cdots,\beta-m\alpha$, 则结构常数 $N_{\alpha\,\beta}$ 的绝对值为

$$|N_{\alpha\,\beta}|=\sqrt{l(m+1)(\alpha\cdot\alpha)/2}, \tag{1.14a}$$

其中两个根的点乘定义为

$$(\alpha\cdot\beta)=\sum_{i\,k}g^{i\,k}\alpha(H_k)\beta(H_i).$$

结构常数的符号规定还应满足

$$\begin{aligned}
&N_{\alpha\,\beta}=-N_{\beta\,\alpha}=N_{\beta\,-\alpha-\beta}=N_{-\alpha-\beta\,\alpha},\\
&N_{\alpha\,\beta}=-N_{-\alpha\,-\beta}=N_{-\beta\,-\alpha},\\
&N_{\alpha\,\beta}N_{\gamma\,-\alpha-\beta-\gamma}+N_{\alpha\,\gamma}N_{-\alpha-\beta-\gamma\,\beta}+N_{\alpha\,-\alpha-\beta-\gamma}N_{\beta\,\gamma}=0.
\end{aligned} \tag{1.14b}$$

$$(g_{l\,m})=\begin{pmatrix}
(g_{i\,k}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

对 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan-Weyl 基, 即基 $\{H_1, H_2, \cdots, H_r, E_\alpha, E_{-\alpha}, E_\beta, E_{-\beta}, \cdots, \}$. 记 Killing 型对应根 α 和 $-\alpha$ 的分量为 $g_{\alpha,-\alpha}$. 因为 E_α 的长度与根无关, 对所有可能的 α, 适当选取 E_α 和 $E_{-\alpha}$, 可以使 $g_{\alpha,-\alpha} = 1$. 再选归一化根, 使 $g_{i\,k} = \sum_{\alpha\in\Sigma} \alpha(H_i)\alpha(H_k) = \delta_{i\,k}$. 于是有 $g^{i\,k} = \delta_{i\,k}$, 和 $C^i_{\alpha\ -\alpha} = \alpha(H_i)$. 设 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 $(g_{l\,m})$ 对 $\mathfrak{h}$ 的限制为 $(g_{i\,k})$, 这时 Killing 型由式 (1.15) 给出. 这样选择的基, 称为 Cartan-Weyl 标准基.

在同构意义下, 半单李代数唯一由其 Cartan 子代数和根系所决定, 并且与具体坐标的选择无关.

由于 α 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的复线性函数, 所以属于 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$. 在 $\mathfrak{h}^*$ 选定一组基之后, 如一个根的第一个非零坐标为正, 则称其为正根. 如果一个正根不能分解为另外两个正根之和, 则称其为素根. 不同素根是线性无关的. 常取 $\mathfrak{g}$ 的素根系 Π 作为 $\mathfrak{h}^*$ 的一组基,

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}.$$

设 k_i 为非负整数, 则 $\mathfrak{g}$ 的任一根 α 可以表为

$$\alpha = \pm \sum_{\alpha_i\in\Pi} k_i\alpha_i. \tag{1.16}$$

设 α_i, α_j 是半单李代数的两个素根, 则有

(1) $\alpha_i - \alpha_j$ 不是根.

(2) $2(\alpha_i \cdot \alpha_j)/(\alpha_i \cdot \alpha_i) = -l$, l 是非负整数.

(3) α_i, α_j 的夹角 $\theta_{i\,j}$ 只能取 $\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$. 取 α_j 为长根, 根的长度比为

$$(\alpha_j \cdot \alpha_j)/(\alpha_i \cdot \alpha_i) = \begin{cases} \text{不定}, & \theta_{i\,j} = \pi/2, \\ 1, & \theta_{i\,j} = 2\pi/3, \\ 2, & \theta_{i\,j} = 3\pi/4, \\ 3, & \theta_{i\,j} = 5\pi/6. \end{cases}$$

半单李代数素根的结构可用 Dynkin 图来描述. 在 Dynkin 图中, 一个素根用一个空心小圆圈代表, 所以共有 r 个小圆圈. 当两个素根间夹角为 $\pi/2$ 时, 这两个素根的小圆圈不连接. 当两个素根间夹角为 $2\pi/3, 3\pi/4$ 或 $5\pi/6$ 时, 这两个素根的小圆圈用一条, 两条或三条线连接. 当两个根长一样时, 连线不画箭头, 否则画上从长根指向短根的箭头.

单李代数的 Dynkin 图, 代表素根的小圆圈是连接在一起的. 若 Dynkin 图断成多个各自相连接的部分, 则说明该半单李代数是多个单李代数理想的直和. 表 1.1 给出单李代数的根系. 按表 1.1 素根顺序, 图 1.1 给出各单李代数的 Dynkin 图.

单李代数除上述 Cartan-Weyl 基外, 还常采用 Chevalley 基. 设单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数的基为 $\{H_1, H_2, \cdots, H_r\}$, 其第 m 个素根为 α_m. 注意 $(\alpha_m \cdot \alpha_m) = \sum_{i\,k} g^{i\,k} \alpha_m(H_k) \alpha_m(H_i)$, $(\alpha_m \cdot H) = \sum_{i\,k} g^{i\,k} \alpha_m(H_k) H_i$, 定义 Chevalley 基的生成元为

$$\begin{aligned}
h_{\alpha_m} &= \frac{2}{(\alpha_m \cdot \alpha_m)} (\alpha_m \cdot H), \\
e_{\alpha_m} &= \sqrt{\frac{2}{(\alpha_m \cdot \alpha_m)}} E_{\alpha_m}, \qquad m = 1, 2, \cdots, r. \\
e_{-\alpha_m} &= \sqrt{\frac{2}{(\alpha_m \cdot \alpha_m)}} E_{-\alpha_m},
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Chevalley 基生成元满足下列对易关系,

$$\begin{aligned}
[h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}] &= 0, \\
[h_{\alpha_i}, e_{\pm\alpha_j}] &= \pm A_{i\,j} e_{\pm\alpha_j}, \\
[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] &= \delta_{i\,j} h_{\alpha_i},
\end{aligned} \tag{1.18a}$$

其中

$$A_{i\,j} = 2(\alpha_i \cdot \alpha_j)/(\alpha_i \cdot \alpha_i). \tag{1.19}$$

表 1.1 单李代数的根系

李代数	维数	秩	非零根	素根	根归一化常数
A_n	$n(n+2)$	n	$e_i - e_j$, $1 \leq i,j \leq n+1$, $i \neq j$,	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$,	$[2(n+1)]^{-1/2}$
B_n	$n(2n+1)$	n	$\pm e_i \pm e_j$, $\pm e_i$, $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$,	$c_i - e_{i+1}$, e_n, $i = 1, \ldots, n-1$,	$[2(2n-1)]^{-1/2}$
C_n	$n(2n+1)$	n	$\pm e_i \pm e_j$, $\pm 2e_i$, $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$,	$e_i - e_{i+1}$, $2e_n$, $i = 1, \ldots, n-1$,	$[2(2n+2)]^{-1/2}$
D_n	$n(2n-1)$	n	$\pm e_i \pm e_j$, $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$,	$e_i - e_{i+1}$, $e_{n-1} + e_n$, $i = 1, \ldots, n-1$,	$[2(2n-2)]^{-1/2}$
G_2	14	2	$e_i - e_j$, $\pm(e_i + e_j) \mp 2e_k$, $1 \leq i,j,k \leq 3$, $i \neq j \neq k$,	$e_1 - e_2$, $-e_1 + 2e_2 - e_3$,	$[24]^{-1/2}$
F_4	52	4	$\pm e_i \pm e_j$, $\pm e_i$, $1 \leq i,j \leq 4$, $i \neq j$, $(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)/2$,	$e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$, e_3, $(e_4 - e_1 - e_2 - e_3)/2$,	$1/6$
E_6	78	6	$e_i - e_j$, $1 \leq i,j \leq 6, i \neq j$, $\pm\sqrt{2}e_7$, $(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6)/2 \pm e_7/\sqrt{2}$ 括弧中项取三个正号	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, \ldots, 5$, $(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5$ $+e_6 + \sqrt{2}e_7)/2$	$[24]^{-1/2}$
E_7	133	7	$e_i - e_j$, $1 \leq i,j \leq 8$, $i \neq j$, $(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)/2$, 括弧中项取四个正号	$e_i - e_{i+1}$, $i = 1, \ldots, 6$, $(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5$ $+e_6 + e_7 - e_8)/2$	$1/6$
E_8	248	8	$\pm e_i \pm e_j$, $1 \leq i,j \leq 8$, $i \neq j$, $(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)/2$ 括弧中项取偶数个正号	$e_i - e_{i+1}$, $e_7 + e_8$, $i = 1, \ldots, 6$ $(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5$ $+e_6 + e_7 - e_8)/2$	$[60]^{-1/2}$

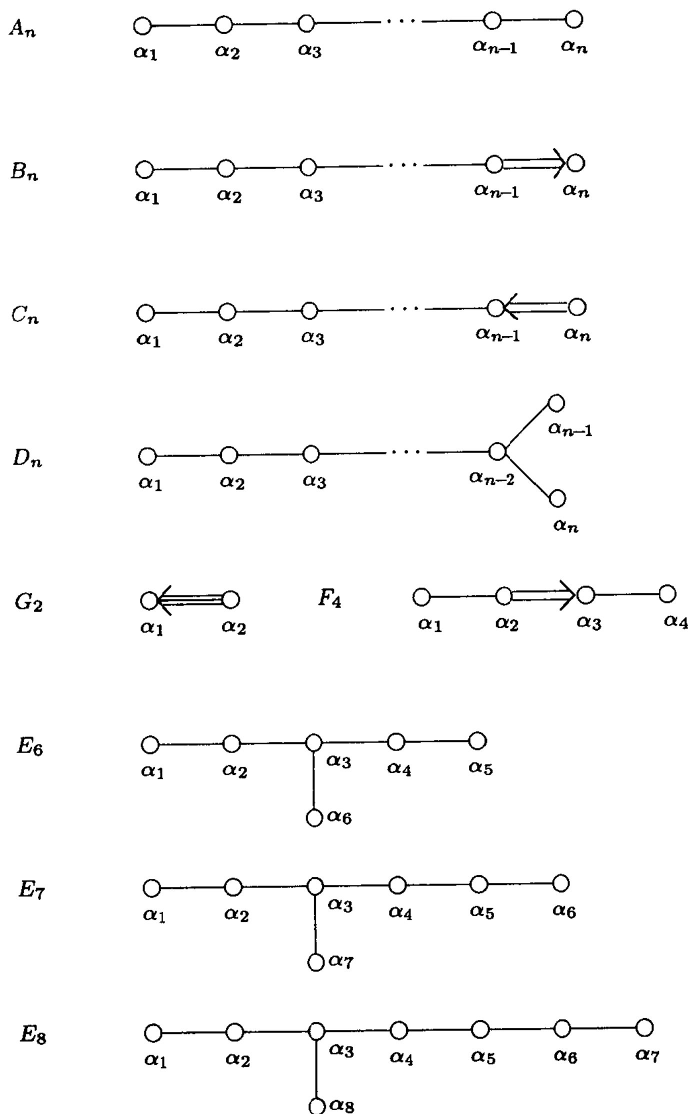


图 1.1 单李代数的 Dynkin 图

矩阵 $(A_{i\,j})$ 称为 Cartan 矩阵. 只要知道素根系, 或 Dynkin 图, 或 Cartan 矩阵中任何一个, 就能决定另外两个.

以上 $3r$ 个 Chevalley 基生成元当然不是 $\mathfrak{g}$ 的完备基, 其他基可由它们生成. 设 $\alpha_i + \cdots + \alpha_j + \alpha_k \in \Sigma$, 有

$$\begin{aligned} e_{\alpha_i+\cdots+\alpha_j+\alpha_k} &= [e_{\alpha_i}, \cdots, [e_{\alpha_j}, e_{\alpha_k}]], \\ e_{-\alpha_i-\cdots-\alpha_j-\alpha_k} &= [e_{-\alpha_i}, \cdots, [e_{-\alpha_j}, e_{-\alpha_k}]]. \end{aligned} \tag{1.18b}$$

也就是说只要 $e_{\pm\alpha_m}$ 和它们间的对易关系已知, 用式 (1.18b) 就可求出非素根对应的基.

根据单李代数素根系的上述性质, 证明单李代数有以下四个系列经典李代数和五个例外李代数. 经典李代数为

(1) $A_n = sl(n+1, C), \quad n \geq 1,$

(2) $B_n = o(2n+1, C), \quad n \geq 2,$

(3) $C_n = sp(2n, C), \quad n \geq 3,$

(4) $D_n = o(2n, C), \quad n \geq 4.$

例外李代数为 G_2, F_4, E_6, E_7 和 E_8 .

在单李代数间, 只有以下同构关系: $A_1 \simeq B_1 \simeq C_1$, $B_2 \simeq C_2$, $A_3 \simeq D_3$.

下面给出各单李代数的 Cartan 矩阵.

$$A_n: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_n: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_n: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_n: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2: \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F_4: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

经典李代数是在物理中应用最多的李代数. 它们可由矩阵定义, 所以都是一般线性代数的子代数. 下面对各个经典李代数分别进行讨论.

A_n

已知 $A_n = sl(n+1, C) = \{x \in gl(n+1, C) | \mathrm{tr}(x) = 0\}$, 所以 A_n 的生成元可以用迹为零的 $(n+1) \times (n+1)$ 复矩阵表示. 设 $E_{i\,j}$ 为

第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素为零的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵.
可以取如下矩阵为 A_n 的 Cartan-Wyel 基.

$$
\begin{aligned}
H_i &= \frac{1}{n+1}\left(nE_{i\,i} - \sum_{j\neq i}^{n+1} E_{j\,j}\right), \\
E_{e_i-e_j} &= E_{i\,j}, \qquad i \neq j.
\end{aligned}
\tag{1.20a}
$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n+1$. H_i 只有 n 个是线性独立的, 因它们满足

$$
H_1 + H_2 + \cdots + H_n + H_{n+1} = 0. \tag{1.20b}
$$

其 Chevalley 基可以取为

$$
\begin{aligned}
h_{\alpha_i} &= E_{i\,i} - E_{i+1\,i+1}, \\
e_{\alpha_i} &= E_{i\,i+1}, \\
e_{-\alpha_i} &= E_{i+1\,i}.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$.

从 $gl(n+1)$ 的 Killing 型加上迹为零的条件, 设 $x,y\in A_n$, 可得 A_n 的 Killing 型为

$$
(x,y) = 2n\mathrm{tr}(xy). \tag{1.22}
$$

B_n 和 D_n

这两个李代数都属于正交李代数

$$
o(m,C) = \{x\in gl(m,C) | x^{\mathrm{t}}H + Hx = 0, \quad H^{\mathrm{t}} = H\}. \tag{1.23}
$$

即 H 是 m 维对称矩阵, 其中

$$
B_n = o(2n+1,C), \qquad D_n = o(2n,C). \tag{1.24}
$$

对 $B_n = o(2n+1,C)$, 用 E_i 表 $i\times i$ 的单位矩阵, 若取

$$H=\begin{pmatrix} 0 & E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.25a}$$

则任意 $x \in B_n$ 可用如下 $2n+1$ 维复矩阵表出

$$a=\begin{pmatrix} w & b & u \\ c & -w^{\mathrm{t}} & v \\ -v^{\mathrm{t}} & -u^{\mathrm{t}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.25b}$$

其中 w, b, c 是 $n \times n$ 矩阵， u, v 是 $n \times 1$ 矩阵，且满足 $b^{\mathrm{t}}=-b$, $c^{\mathrm{t}}=-c$.

设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1，其余元素为零的 $2n+1$ 维矩阵，则可将 B_n 的 Cartan-Weyl 基用下面矩阵表示出来.

$$\begin{aligned}
&H_i=E_{i\,i}-E_{n+i\,n+i}, \\
&E_{e_i-e_j}=E_{i\,j}-E_{n+j\,n+i}, \quad i \neq j, \\
&E_{e_i+e_j}=E_{i\,n+j}-E_{j\,n+i}, \quad i \neq j, \\
&E_{-e_i-e_j}=-E_{n+i\,j}+E_{n+j\,i}, \quad i \neq j, \\
&E_{e_i}=E_{i\,2n+1}-E_{2n+1\,n+i}, \\
&E_{-e_i}=-E_{n+i\,2n+1}+E_{2n+1\,i},
\end{aligned} \tag{1.26}$$

其中 $i, j=1,2,\cdots,n$.

其 Chevalley 基为

$$\begin{aligned}
&h_{\alpha_i}=\begin{cases} E_{i\,i}-E_{n+i\,n+i}-E_{i+1\,i+1}+E_{n+i+1\,n+i+1}, \\ \qquad i=1,2,\cdots,n-1, \\ 2(E_{n\,n}-E_{2n\,2n}), \quad i=n, \end{cases} \\
&e_{\alpha_i}=\begin{cases} E_{i\,i+1}-E_{n+i+1\,n+i}, \quad i=1,2,\cdots,n-1, \\ \sqrt{2}(E_{n\,2n+1}-E_{2n+1\,2n}), \quad i=n, \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

$$e_{-\alpha_i} = \begin{cases} E_{i+1\ i} - E_{n+i\ n+i+1}, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ \sqrt{2}(-E_{2n\ 2n+1} + E_{2n+1\ n}), & i = n. \end{cases}$$

对 $D_n = o(2n, C)$ ，若取

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.28a}$$

则任意 $x \in D_n$ 可用如下 $2n$ 维复矩阵表出

$$a = \begin{pmatrix} w & b \\ c & -w^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \tag{1.28b}$$

其中 w, b, c 是 $n \times n$ 矩阵，且满足 $b^{\mathrm{t}} = -b,\ c^{\mathrm{t}} = -c$.

设 $E_{i\ j}$ 是第 i 行第 j 列为 1，其余元素为零的 $2n$ 维矩阵，则可将 D_n 的 Cartan-Weyl 基用下面矩阵表示出来.

$$\begin{aligned} &H_i = E_{i\ i} - E_{n+i\ n+i}, \\ &E_{e_i - e_j} = E_{i\ j} - E_{n+j\ n+i}, \quad i \neq j, \\ &E_{e_i + e_j} = E_{i\ n+j} - E_{j\ n+i}, \quad i \neq j, \\ &E_{-e_i - e_j} = -E_{n+i\ j} + E_{n+j\ i}, \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

其 Chevalley 基为

$$\begin{aligned} &h_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{i\ i} - E_{n+i\ n+i} - E_{i+1\ i+1} + E_{n+i+1\ n+i+1}, \\ \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ E_{n-1\ n-1} - E_{2n-1\ 2n-1} + E_{n\ n} - E_{2n\ 2n}, \\ \qquad i = n, \end{cases} \\ &e_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{i\ i+1} - E_{n+i+1\ n+i}, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ E_{n-1\ 2n} - E_{n\ 2n-1}, & i = n, \end{cases} \\ &e_{-\alpha_i} = \begin{cases} E_{i+1\ i} - E_{n+i\ n+i+1}, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ -E_{2n-1\ n} + E_{2n\ n-1}, & i = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.30}$$

C_n

C_n 又称辛代数. 满足

$$C_n = sp(2n, C) = \{x \in gl(2n, C) | x^{t}G + Gx = 0, \quad G^{t} = -G\}. \tag{1.31}$$

取 $2n$ 维反对称矩阵 G 为

$$G = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.32a}$$

则任意 $x \in C_n$ 可用如下 $2n$ 维复矩阵表出

$$x = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d^{t} \end{pmatrix}, \tag{1.32b}$$

其中 d, e, f 是 $n \times n$ 矩阵, 且满足 $e^{t} = e$, $f^{t} = f$.

设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1 , 其余元素为零的 $2n$ 维矩阵, 则可将 C_n 的 Cartan-Weyl 基用下面矩阵表示出来.

$$\begin{aligned}
&H_i = E_{i\,i} - E_{n+i\;n+i}, \\
&E_{e_i - e_j} = -E_{i\,j} + E_{n+j\;n+i}, \quad i \neq j, \\
&E_{e_i + e_j} = E_{i\;n+j} + E_{j\;n+i}, \quad i \neq j, \\
&E_{-e_i - e_j} = E_{n+j\;i} + E_{n+i\;j}, \quad i \neq j, \\
&E_{2e_i} = \sqrt{2} E_{i\;n+i}, \\
&E_{-2e_i} = \sqrt{2} E_{n+i\;i},
\end{aligned} \tag{1.33}$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

其 Chevalley 基为

$$h_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{i\,i} - E_{n+i\;n+i} - E_{i+1\;i+1} + E_{n+i+1\;n+i+1}, \\ \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ E_{n\,n} - E_{2n\;2n}, \;\; i = n, \end{cases}$$

$$
e_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{i\,i+1} - E_{n+i+1\,n+i}, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ E_{n\,2n}, & i = n, \end{cases}
$$
$$
e_{-\alpha_i} = \begin{cases} E_{i+1\,i} - E_{n+i\,n+i+1}, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ E_{2n\,n}, & i = n. \end{cases} \tag{1.34}
$$

以上已经对经典李代数作了简单介绍，下面将给出两个具体李代数的例子.

首先看李代数 $A_1 = sl(2, C)$. 它的秩为 1, Dynkin 图是一个空心小圆圈，Cartan 矩阵为 (2). 它是维数最小的经典李代数. 它只有一个素根 $\alpha_1 = e_1 - e_2$. 所以也只有这一个正根. 其 Cartan-Wyel 基可以取为

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{2}(E_{1\,1} - E_{2\,2}), \\
E_{e_1-e_2} &= E_{1\,2}, \\
E_{e_2-e_1} &= E_{2\,1},
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

注意 $H_2 = \frac{1}{2}(E_{2\,2} - E_{1\,1}) = -H_1$ 不是独立的，所以只取 H_1 为基即可. 直接计算其李积满足

$$
\begin{aligned}
[H_1, E_{e_1-e_2}] &= E_{e_1-e_2}, \\
[H_1, E_{e_2-e_1}] &= -E_{e_2-e_1}, \\
[E_{e_1-e_2}, E_{e_2-e_1}] &= 2H_1.
\end{aligned} \tag{1.36}
$$

如取生成元为

$$
\begin{aligned}
L_0 &= H_1, \\
L_{+1} &= -E_{e_1-e_2}/\sqrt{2}, \\
L_{-1} &= E_{e_2-e_1}/\sqrt{2},
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

则 $L_0, L_{\pm 1}$ 构成的李代数与 $o(3)$ 同构，满足熟悉的角动量间对易关系

$$\begin{aligned}
&[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1}, \\
&[L_{+1}, L_{-1}] = -L_0,
\end{aligned} \tag{1.38}$$

如取基为 (L_0, L_{+1}, L_{-1}), 则其 Killing 型为

$$(g_{i\,k}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.39a}$$

Killing 型的逆为

$$(g^{i\,k}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.39b}$$

其 Casimir 算子可以写成

$$C_2 = 1/2(L_0^2 - L_{+1}L_{-1} - L_{-1}L_{+1}) = L^2/2, \tag{1.40}$$

其中 L^2 是角动量平方. 直接计算可以证明 C_2 与生成元 $L_0, L_{\pm 1}$ 是对易的.

伴随表示为 3×3 的矩阵，即

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(L_0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\mathrm{ad}(L_{+1}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathrm{ad}(L_{-1}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

再看李代数 $C_2 = sp(4,C)$ 的例子，它的秩为 2，图 1.2 给出它的 Dynkin 图．设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1，其余元素为零的 4 维矩阵，则可将 C_2 的 Cartan-Weyl 基用下面矩阵表示出来.

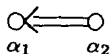


图 1.2　C_2 的 Dynkin 图

$$\begin{aligned}
&H_1 = E_{1\,1} - E_{3\,3}, && H_2 = E_{2\,2} - E_{4\,4},\\
&E_{e_1-e_2} = -E_{1\,2} + E_{4\,3}, && E_{e_2-e_1} = -E_{2\,1} + E_{3\,4},\\
&E_{e_1+e_2} = E_{1\,4} + E_{2\,3}, && E_{-e_1-e_2} = E_{4\,1} + E_{3\,2},\\
&E_{2e_1} = \sqrt{2}E_{1\,3}, && E_{-2e_1} = \sqrt{2}E_{3\,1},\\
&E_{2e_2} = \sqrt{2}E_{2\,4}, && E_{-2e_2} = \sqrt{2}E_{4\,2}.
\end{aligned}\tag{1.42}$$

它们有以下非零对易关系，

$$\begin{aligned}
&[H_1, E_{\pm(e_1-e_2)}] = \pm E_{\pm(e_1-e_2)},\\
&[H_2, E_{\pm(e_1-e_2)}] = \mp E_{\pm(e_1-e_2)},\\
&[H_1, E_{\pm(e_1+e_2)}] = \pm E_{\pm(e_1+e_2)},\\
&[H_2, E_{\pm(e_1+e_2)}] = \pm E_{\pm(e_1+e_2)},\\
&[H_1, E_{\pm 2e_1}] = \pm 2E_{\pm 2e_1},\\
&[H_2, E_{\pm 2e_2}] = \pm 2E_{\pm 2e_2},\\
&[E_{e_1-e_2}, E_{-(e_1-e_2)}] = H_1 - H_2,\\
&[E_{e_1+e_2}, E_{-(e_1+e_2)}] = H_1 + H_2,\\
&[E_{2e_1}, E_{-2e_1}] = 2H_1,\\
&[E_{2e_2}, E_{-2e_2}] = 2H_2,\\
&[E_{e_1-e_2}, E_{e_1+e_2}] = -\sqrt{2}E_{2e_1},\\
&[E_{e_1-e_2}, E_{-(e_1+e_2)}] = \sqrt{2}E_{-2e_2},\\
&[E_{e_1-e_2}, E_{-2e_1}] = \sqrt{2}E_{-(e_1+e_2)},\\
&[E_{e_1-e_2}, E_{2e_2}] = -\sqrt{2}E_{e_1+e_2},\\
&[E_{-(e_1-e_2)}, E_{e_1+e_2}] = -\sqrt{2}E_{2e_2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[E_{-(e_1-e_2)}, E_{-(e_1+e_2)}] = \sqrt{2}E_{-2e_1}, \\
&[E_{-(e_1-e_2)}, E_{2e_1}] = -\sqrt{2}E_{e_1+e_2}, \\
&[E_{-(e_1-e_2)}, E_{-2e_2}] = \sqrt{2}E_{-(e_1+e_2)}, \\
&[E_{e_1+e_2}, E_{-2e_1}] = -\sqrt{2}E_{-(e_1-e_2)}, \\
&[E_{e_1+e_2}, E_{-2e_2}] = -\sqrt{2}E_{e_1-e_2}, \\
&[E_{-(e_1+e_2)}, E_{2e_1}] = \sqrt{2}E_{e_1-e_2}, \\
&[E_{-(e_1+e_2)}, E_{2e_2}] = \sqrt{2}E_{-(e_1-e_2)}.
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

取基的顺序为 $(H_1, H_2, E_{e_1-e_2}, E_{-(e_1-e_2)}, E_{e_1+e_2}, E_{-(e_1+e_2)}, E_{2e_1}, E_{-2e_1}, E_{2e_2}, E_{-2e_2})$. 由式 (1.44) 的结构常数可以直接计算出 C_2 的 Killing 型为

$$
(g_{i\,k}) = 12\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}. \tag{1.44}
$$

如果把所有基都乘以根归一化常数，从表 1.1 知其值为 $1/\sqrt{12}$, 即取 Cartan-Weyl 标准基，则 Killing 型为式 (1.44) 中矩阵，没有因子 12.

C_2 的 Casimir 算子为

$$
\begin{aligned}
C_2 = \frac{1}{12}(&H_1H_1 + H_2H_2 + E_{e_1-e_2}E_{-(e_1-e_2)} + E_{-(e_1-e_2)}E_{e_1-e_2} \\
&+ E_{e_1+e_2}E_{-(e_1+e_2)} + E_{-(e_1+e_2)}E_{e_1+e_2} + E_{2e_1}E_{-2e_1}
\end{aligned}
$$

$$+E_{-2e_1}E_{2e_1}+E_{2e_2}E_{-2e_2}+E_{-2e_2}E_{2e_2}). \tag{1.45}$$

1.3 实单李代数

由于复数域是封闭数域，所以节 1.2 对半单李代数和单李代数的分类是在复数域上进行的. 而李群的局域性质由实李代数决定，所以实李代数对研究李群很重要. 以下作一简单介绍.

设 $\mathfrak{g}$ 是实数域上李代数，即为实李代数. 对 $x,y,x',y'\in\mathfrak{g}$, $a,b\in R$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 定义它的复扩充 $\mathfrak{g}^c$ 的元素为 $x+\mathrm{i}y$, $\mathfrak{g}^c$ 的数乘，加法和李积满足下面规定:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ (a+\mathrm{i}b)(x+\mathrm{i}y)=(ax-by)+\mathrm{i}(bx+ay),\\
&(2)\ \ (x+\mathrm{i}y)+(x'+\mathrm{i}y')=(x+x')+\mathrm{i}(y+y'),\\
&(3)\ \ [(x+\mathrm{i}y),(x'+\mathrm{i}y')]=([x,x']-[y,y'])+\mathrm{i}([x,y']+[y,x']),
\end{aligned} \tag{1.46}$$

则 $\mathfrak{g}^c$ 是复数域上李代数. 称为 $\mathfrak{g}$ 的复扩充.

设 $(x_1,x_2,\cdots,x_l)$ 是实李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基，其结构常数 $c_{i\,j}^{k}$ 为实数，则 $(x_1,x_2,\cdots,x_l)$ 也是其复扩充 $\mathfrak{g}^c$ 的一组基， $\mathfrak{g}^c$ 的结构常数也是 $c_{i\,j}^{k}$. 所以如果复李代数 $\mathfrak{g}^c$ 是某一实李代数的复扩充，总可以选择适当的基，使其结构常数为实.

设 $\mathfrak{g}^c$ 是复李代数，如 $\mathfrak{g}^r\subset\mathfrak{g}^c$, $\mathfrak{g}^r$ 是实李代数，且 $\mathfrak{g}^r$ 的复扩充是 $\mathfrak{g}^c$, 则称 $\mathfrak{g}^r$ 是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个实形. 对实李代数，总可以按上规定，唯一定义其复扩充. 而对复李代数，却并不一定存在实形. 即使存在实形，也不一定是唯一的.

设 $\mathfrak{g}^c$ 是实李代数 $\mathfrak{g}$ 的复扩充， $\mathfrak{g}^r$ 是复李代数 $\mathfrak{g}^c$ 的实形, $(\ ,\ )$, $(\ ,\ )^c$, 和 $(\ ,\ )^r$ 分别为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^c$ 和 $\mathfrak{g}^r$ 的 Killing 型，则有

$$\begin{aligned}
&(x,y)=(x,y)^c, && x,y\in\mathfrak{g},\\
&(x,y)^r=2\mathrm{Re}((x,y)^c), && x,y\in\mathfrak{g}^r.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

实李代数 $\mathfrak{g}$ 半单的充分必要条件是其复扩充 $\mathfrak{g}^c$ 半单. 下面可以看到, 此条件不能用于单李代数和其复扩充. 复单李代数的实形是实单李代数, 而实单李代数的复扩充却不一定是单的. 如实单李代数 $so(3,1)$ 的复扩充为 $o(4,C) \simeq D_2 = A_1 \oplus A_1$, 就是半单而不是单的. 实李代数 $\mathfrak{g}$ 半单的充分必要条件是其 Killing 型不退化. 一个实半单李代数可以唯一分解成有限个非交换实单理想的直和.

记 $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, 则实李代数可解的充分必要条件是, 对所有 $x \in \mathfrak{D}\mathfrak{g}$, 其 Killing 型满足 $(x,x) = 0$.

设 $\mathfrak{g}^c$ 是实李代数 $\mathfrak{g}$ 的复扩充, 则 $\mathfrak{g}^c$ 的元素可以唯一表为 $x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathfrak{g}$. 可在 $\mathfrak{g}^c$ 中引进映射

$$\sigma(x + \mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y, \tag{1.48a}$$

对 $z, z' \in \mathfrak{g}^c$, $c \in C$ 满足

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \sigma^2 = 1, \\
&(2) \quad \sigma(z + z') = \sigma(z) + \sigma(z'), \\
&(3) \quad \sigma(cz) = c^*\sigma(z), \\
&(4) \quad \sigma([z, z']) = [\sigma(z), \sigma(z')].
\end{aligned} \tag{1.48b}$$

σ 将 $\mathfrak{g}^c$ 一一映入 $\mathfrak{g}^c$. 但它是反线性的, 所以不是自同构映射, 称为对合映射, 或简称为对合. 而对实李代数, 由于是实数域上的李代数, 所以存在对合自同构映射.

设 $\mathfrak{g}^c$ 是复李代数, 若 σ 是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个对合, 则在对合映射下不动点的全体, 构成 $\mathfrak{g}^c$ 的一个实形,

$$\mathfrak{g}^r = \{z \in \mathfrak{g}^c | \sigma(z) = z\}. \tag{1.49}$$

反之, 若 $\mathfrak{g}^r$ 是复李代数 $\mathfrak{g}^c$ 的一个实形, 则 $\mathfrak{g}^r$ 必为 $\mathfrak{g}^c$ 的某个对合 σ 不动点的全体, 满足式 (1.49).

实单李代数是半单的，所以其复扩充是半单的. 因此实单李代数的复扩充有两种可能，一种是复单李代数，一种是复半单李代数. 这分别对应找实单李代数的下面两种途径：

(1) 复单李代数的互不同构实形.

(2) 由复单李代数构成，即其复扩充为复半单李代数.

后面将讨论找复单李代数的互不同构实形问题.

现先讨论由复单李代数构成实单李代数. 这时实单李代数 $\mathfrak{g}$ 的复扩充 $\mathfrak{g}^c$ 是半单的. 设 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个非零单理想，σ 是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个对合，且 $\mathfrak{g}=\{z\in\mathfrak{g}^c|\sigma(z)=z\}$, 则 $\sigma\mathfrak{g}_1$ 也是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个非零单理想，由 $\mathfrak{g}^c$ 半单，知 $\sigma\mathfrak{g}_1$ 也是 $\mathfrak{g}^c$ 的一个直和因子，有 $[\mathfrak{g}_1,\sigma\mathfrak{g}_1]=0$. 对 $x\in\mathfrak{g}_1$，考虑从 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}$ 的映射 $x\to x+\sigma(x)$. 因为对 $x,y\in\mathfrak{g}_1$, $a\in R$, 有

$$
\begin{aligned}
&x+y\to(x+\sigma(x))+(y+\sigma(y))=(x+y)+\sigma(x+y),\\
&ax\to a(x+\sigma(x))=ax+\sigma(ax),\\
&[x,y]\to[x,y]+\sigma([x,y])=[x+\sigma(x),y+\sigma(y)].
\end{aligned}
\tag{1.50a}
$$

这是从 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}$ 的实自同构映射. 说明 $\mathfrak{g}^c$ 除 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\sigma\mathfrak{g}_1$ 外，不含其他理想. 否则 $\mathfrak{g}$ 不是单的. 于是从复单李代数 $\mathfrak{g}_1$, 按式 (1.50a) 和

$$
\mathfrak{g}^c=\mathfrak{g}_1\oplus\sigma\mathfrak{g}_1, \tag{1.50b}
$$

可以得到 $\mathfrak{g}^c$ 及其实形 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 是实单李代数.

为了找复单李代数的不同实形，先讨论紧致半单李代数.

如实李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是负定的，则称 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单的. 由紧致半单李代数所决定的单连通李群是紧致半单李群.

任意复半单李代数有且只有一个紧致实形. 也就是说复半单李代数的任意两个紧致实形同构.

设 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数，其 Cartan-weyl 标准基为 $\{H_1,H_2,\cdots,E_\alpha,E_{-\alpha},\cdots\}$, 即在此基下 Killing 型有式 (1.15) 形式. 对基作线性

变换

$$\begin{aligned}\tilde{H}_j &= \mathrm{i}H_j,\\ U_\alpha &= \mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha}),\\ V_\alpha &= E_\alpha - E_{-\alpha}.\end{aligned} \tag{1.51a}$$

在基 $\{\tilde{H}_1, \cdots, \tilde{H}_r, U_\alpha, V_\alpha, \cdots\}$ 下，Killing 型的非零元素有

$$\begin{aligned}(\tilde{H}_j, \tilde{H}_k) &= -\delta_{j\,k},\\ (U_\alpha, U_\alpha) &= -2,\\ (V_\alpha, V_\alpha) &= -2,\end{aligned} \tag{1.51b}$$

其中 α 取 $\mathfrak{g}$ 的所有正根. 因此以 $\{\tilde{H}_1, \cdots, \tilde{H}_r, U_\alpha, V_\alpha, \cdots\}$ 为基，在实数域上李代数 $\mathfrak{g}_u$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形，

$$\mathfrak{g}_u = \left\{ \sum_1^r a_j H_j + \sum_{\alpha\in\Sigma_+} (b_\alpha U_\alpha + c_\alpha V_\alpha) | a_j, b_\alpha, c_\alpha \in R \right\}.$$

用其他方法得到 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形，均与 $\mathfrak{g}_u$ 同构.

例　复单李代数 $B_1 = o(3, C) \simeq A_1 \simeq C_1$. 取 Cartan-Wyel 标准基，即使根归一化为 $\pm\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e_1$,

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1\,1} - E_{2\,2}),\\ E_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1\,3} - E_{3\,2}),\\ E_{-\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{3\,1} - E_{2\,3}).\end{aligned} \tag{1.52a}$$

满足对易关系

$$\begin{aligned}[H, E_{\pm\alpha}] &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}E_{\pm\alpha},\\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \frac{1}{\sqrt{2}}H.\end{aligned} \tag{1.52b}$$

此时 Killing 型为

$$
(g_{j\,k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.52c}
$$

作变换

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H} = \mathrm{i}H, \\
&U_\alpha = \mathrm{i}(E_\alpha + E_{-\alpha}), \\
&V_\alpha = E_\alpha - E_{-\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.53a}
$$

满足对易关系

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{H}, U_\alpha] = -\frac{1}{\sqrt{2}} V_\alpha, \\
&[\tilde{H}, V_\alpha] = \frac{1}{\sqrt{2}} U_\alpha, \\
&[U_\alpha, V_\alpha] = -\sqrt{2}\tilde{H}.
\end{aligned} \tag{1.53b}
$$

相应的 Killing 型为负定的

$$
(g_{j\,k}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{1.53c}
$$

所以以 $\tilde{H}, U_\alpha, V_\alpha$ 为基，在实数域上的实李代数是 $o(3, C)$ 的紧致实形 $o(3, R) = so(3)$. 这时基 $\tilde{H}, U_\alpha, V_\alpha$ 是反厄米算符，到李群 $SO(3)$ 的指数映射为 $\exp(a\tilde{H} + bU_\alpha + cV_\alpha)$, 其中 $a, b, c \in R$. 在物理中，习惯用厄米算符 J_1, J_2, J_3 为基，如 $so(3)$ 常取基为

$$
\begin{aligned}
&J_1 = \mathrm{i}U_\alpha, \\
&J_2 = \mathrm{i}V_\alpha, \\
&J_3 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\tilde{H}.
\end{aligned} \tag{1.54a}
$$

满足对易关系

$$\begin{aligned}
[J_1, J_2] &= \mathrm{i}J_3, \\
[J_2, J_3] &= \mathrm{i}J_1, \\
[J_3, J_1] &= \mathrm{i}J_2.
\end{aligned} \tag{1.54b}$$

这时到李群 $SO(3)$ 的指数映射为 $\exp(\mathrm{i}a_1J_1+\mathrm{i}a_2J_2+\mathrm{i}a_3J_3)$, 其中 $a_1, a_2, a_3 \in R$. 所以从式 (1.55b) 以 J_1, J_2, J_3 为基，算出的 Killing 型是正定的，相当于以 $\mathrm{i}J_1, \mathrm{i}J_2, \mathrm{i}J_3$ 为基，得到的 Killing 型是负定的.

设 $\mathfrak{g}_u$ 是复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形， σ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个对合自同构， E 是恒等变换，则通过线性变换

$$P = \sqrt{\sigma} = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\sigma + \frac{1+\mathrm{i}}{2}E, \tag{1.55}$$

可以实现 $\mathfrak{g}$ 的一个实形. 通过这种方法可以实现 $\mathfrak{g}$ 的所有实形. 设 A 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构映射， R 是 $\mathfrak{g}_u$ 的实线性变换，若两个线性变换 P_1, P_2 满足条件

$$P_1 = AP_2R, \tag{1.56}$$

则 P_1 和 P_2 实现的实形同构.

所以要找复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的所有互不同构的实形，应先求出其紧致实形 $\mathfrak{g}_u$. 再找出 $\mathfrak{g}_u$ 的所有不等价对合自同构 σ. 选 $\mathfrak{g}_u$ 的基使 σ 为对角矩阵，由于 $\mathfrak{g}_u$ 的 Killing 型是负定的，所以 σ 必为幺正算符， σ 的本征值只能是 ± 1. 定义投影算符 P^+, P^- 各对应 σ 本征值为 $+1, -1$, 即

$$\begin{aligned}
P^+ &= \frac{1}{2}(1+\sigma), \\
P^- &= \frac{1}{2}(1-\sigma).
\end{aligned} \tag{1.57a}$$

由式 (1.55) 知通过 σ, 可以实现 $\mathfrak{g}$ 的一个实形

$$\mathfrak{g}_\sigma = P^+\mathfrak{g}_u \oplus \mathrm{i}P^-\mathfrak{g}_u. \tag{1.57b}$$

即对 σ 本征值为 -1 的基乘 i, 其余的基不变, 在实数域上构成实单李代数 $\mathfrak{g}_\sigma$.

如复单李代数 $o(3,C)$ 的紧致实形 $so(3)$. 把基取成 $x_1=\sqrt{2}\tilde{H}$, $x_2=U_\alpha$, $x_3=V_\alpha$, 则基之间对易关系呈对称形式

$$
\begin{aligned}
&[x_1,x_2]=x_3,\\
&[x_2,x_3]=x_1,\\
&[x_3,x_1]=x_2.
\end{aligned}
\tag{1.58}
$$

则 $so(3)$ 在对角基中, 映射取本征值 ±1 可能有

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\\
&\sigma_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad \sigma_4=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\\
&\sigma_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad \sigma_6=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{1.59a}
$$

其中 σ_5,σ_6 不是对合自同构映射, 应该去掉. σ_1 是恒等映射, 不给出非紧实形. 只有 $\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ 是非恒等对合自同构映射.

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\sigma_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\mathrm{i}&0\\0&0&\mathrm{i}\end{pmatrix},\qquad \sqrt{\sigma_3}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0&0\\0&1&0\\0&0&\mathrm{i}\end{pmatrix},\\
&\sqrt{\sigma_4}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0&0\\0&\mathrm{i}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.59b}
$$

且 $o(3,C)$ 有自同构映射 $A_3=\sqrt{(\sigma_2)}(\sqrt{\sigma_3})^3$ 和 $A_4=\sqrt{(\sigma_2)}(\sqrt{\sigma_4})^3$，分别使 $A_3\sqrt{\sigma_3}=\sqrt{\sigma_2}$ 和 $A_4\sqrt{\sigma_4}=\sqrt{\sigma_2}$. 因此用 $\sqrt{\sigma_2}$, $\sqrt{\sigma_3}$ 和 $\sqrt{\sigma_4}$ 实现的实形是等价的. 所以 $o(3,C)$ 只有一个非紧实形 $o(2,1)$. 它是实数域上，取生成元为 $y_1=\mathrm{i}x_1$, $y_2=\mathrm{i}x_2$, $y_3=x_3$ 的实单李代数，满足对易关系

$$\begin{aligned}[][y_1,y_2]&=-y_3,\\ [y_2,y_3]&=y_1,\\ [y_3,y_1]&=y_2.\end{aligned}\tag{1.59c}$$

设 E_p 为 $p\times p$ 单位矩阵，记

$$\begin{aligned}I_{p\,q}&=\begin{pmatrix}-E_p & 0\\ 0 & E_q\end{pmatrix},\\ J_n&=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix},\\ K_{p\,q}&=\begin{pmatrix}I_{p\,q} & 0\\ 0 & I_{p\,q}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.60}$$

在经典李代数的实形定义中将用到矩阵 $I_{p\,q},J_n,K_{p\,q}$, 下面分别给出各经典李代数的实形.

$$A_{n-1}=sl(n,C)$$

其紧致实形为 $su(n)$,

$$su(n)=\{x\in sl(n,C)|x^\dagger=-x,\ \ \mathrm{tr}(x)=0\}.\tag{1.61a}$$

非紧实形有:

(1) $sl(n,R)$, 实数域上的 $sl(n,C)$;

(2) $su(p,q)$,

$$su(p,q)=\{x\in gl(n,C)|x=-I_{p\,q}x^\dagger I_{p\,q},\ \ \mathrm{tr}(x)=0\},\tag{1.61b}$$

其中 $p+q=n$, $p \geq q$. 设 Z_1, Z_2 和 Z_3 分别为 $p\times p, p\times q$ 和 $q\times q$ 复矩阵，则 $su(p,q)$ 的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ {Z_2}^{\dagger} & Z_3 \end{pmatrix},$$

且满足 ${Z_1}^{\dagger}=-Z_1$, ${Z_3}^{\dagger}=-Z_3$ 和 $\mathrm{tr}(Z_1)+\mathrm{tr}(Z_3)=0$;

(3) $su^*(2n)$,

$$su^*(2n)=\{x\in gl(n,C)|xJ_n=J_nx^*,\ \ \mathrm{tr}(x)=0\}, \tag{1.61c}$$

设 Z_1, Z_2 为 $n\times n$ 复矩阵，则 $su^*(2n)$ 的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_2^* & Z_1^* \end{pmatrix},$$

且满足 $\mathrm{tr}(Z_1+Z_1^*)=0$.

$$B_n=o(2n+1,C)$$

其紧致实形为 $so(2n+1)$,

$$so(2n+1)=o(2n+1,R)=\{x\in gl(2n+1,R)|x^{\mathrm{t}}=-x,\}, \tag{1.62a}$$

即其元素为 $(2n+1)\times(2n+1)$ 实反对称矩阵.

非紧实形为 $so(p,q)$,

$$so(p,q)=\{x\in gl(2n+1,R)|x=-I_{p\,q}x^{\mathrm{t}}I_{p\,q},\ \ \mathrm{tr}(x)=0\}. \tag{1.62b}$$

其中 $p+q=2n+1, p\geq q$. 设 X_1, X_2 和 X_3 分别为 $p\times p, p\times q$ 和 $q\times q$ 实矩阵，则 $so(p,q)$ 的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^{\mathrm{t}} & X_3 \end{pmatrix},$$

且满足 $X_1^{\mathrm{t}}=-X_1$, $X_3^{\mathrm{t}}=-X_3$.

$$C_n = sp(2n, C)$$

其紧致实形为 $sp(2n)$,

$$\begin{aligned} sp(2n) &= usp(2n) = sp(2n, C) \cap su(2n) \\ &= \{x \in gl(2n, C) | xJ_n + J_n x^{\mathrm{t}} = 0, \;\; x^{\dagger} = -x\}. \end{aligned} \tag{1.63a}$$

设 Z_1, Z_2 为 $n \times n$ 复矩阵，则 $sp(2n)$ 的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_2{}^{\dagger} & -Z_1^{\mathrm{t}} \end{pmatrix},$$

且满足 $Z_1{}^{\dagger} = -Z_1$, $Z_2^{\mathrm{t}} = Z_2$.

非紧实形有：

(1) $sp(2n, R)$, 实数域上的 $sp(2n, C)$. 设 X_1, X_2, X_3 为 $n \times n$ 实矩阵，其元素具有形式

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^{\mathrm{t}} \end{pmatrix},$$

且满足 $X_2^{\mathrm{t}} = X_2$, $X_3^{\mathrm{t}} = X_3$;

(2) $sp(2p, 2q)$,

$$\begin{aligned} &sp(2p, 2q) \\ &\quad = \{x \in gl(2n, C) | xJ_n + J_n x^{\mathrm{t}} = 0, \;\; x = -K_{p\,q} x^{\dagger} K_{p\,q}\}, \end{aligned} \tag{1.63b}$$

其中 $p + q = n$, $p \geq q$. 设 Z_{11}, Z_{13} 和 Z_{22}, Z_{24} 分别为 $p \times p$ 和 $q \times q$ 复矩阵， Z_{12}, Z_{14} 为 $p \times q$ 复矩阵，则 $sp(2p, 2q)$ 的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{12}^{\dagger} & Z_{22} & Z_{14}^{\mathrm{t}} & Z_{24} \\ -Z_{13}^{*} & Z_{14}^{*} & Z_{11}^{*} & -Z_{12}^{*} \\ Z_{14}^{\dagger} & -Z_{24}^{*} & -Z_{12}^{\mathrm{t}} & Z_{22}^{*} \end{pmatrix},$$

且满足 $Z_{11}^{\dagger}=-Z_{11}$, $Z_{22}^{\dagger}=-Z_{22}$ 和 $Z_{13}^{\mathrm{t}}=Z_{13}$, $Z_{24}^{\mathrm{t}}=Z_{24}$.

$$D_n=o(2n,C)$$

其紧致实形为 $so(2n)$,

$$so(2n)=o(2n,R)=\{x\in gl(2n,R)|x^{\mathrm{t}}=-x\},\tag{1.64a}$$

即其元素为 $2n\times 2n$ 实反对称矩阵.

非紧实形为

(1) $so(p,q)$,

$$so(p,q)=\{x\in gl(2n,R)|x=-I_{p\,q}x^{\mathrm{t}}I_{p\,q},\quad \mathrm{tr}(x)=0\},\tag{1.64b}$$

其中 $p+q=2n$, $p\geq q$, 设 X_1,X_2 和 X_3 分别为 $p\times p,p\times q$ 和 $q\times q$ 实矩阵, 则 $so(p,q)$ 的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^{\mathrm{t}} & X_3 \end{pmatrix},$$

且满足 $X_1^{\mathrm{t}}=-X_1$, $X_3^{\mathrm{t}}=-X_3$;

(2) $so^*(2n)$,

$$so^*(2n)=\{x\in su^*(2n)|x=-x^{\mathrm{t}}\},\tag{1.64c}$$

设 Z_1,Z_2 为 $n\times n$ 复矩阵, 则 $so^*(2n)$ 的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_2^* & Z_1^* \end{pmatrix},$$

且满足 $Z_1^{\mathrm{t}}=-Z_1$, $Z_2^{\dagger}=Z_2$.

例外李代数 G_2,F_4,E_6,E_7,E_8 各有一紧致实形, 分别记为 G_{2u}, F_{4u}, E_{6u}, E_{7u}, E_{8u}. 它们的非紧实形如下:

表 1.2 复经典李代数实形的同构关系

复李代数同构	实形同构关系
$A_1 \simeq B_1 \simeq C_1$	$su(2) \simeq so(3) \simeq sp(2)$
	$sl(2,R) \simeq su(1,1) \simeq so(2,1) \simeq sp(2,R)$
$B_2 \simeq C_2$	$so(5) \simeq sp(4)$
	$so(3,2) \simeq sp(4,R)$
	$so(4,1) \simeq sp(2,2)$
$D_2 \simeq A_1 \oplus A_1$	$so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$
	$so(2,2) \simeq sl(2,R) \oplus sl(2,R)$
	$sl(2,C) \simeq so(3,1)$
	$so^*(4) \simeq sl(2,R) \oplus su(2)$
$A_3 \simeq D_3$	$su(4) \simeq so(6)$
	$sl(4,R) \simeq so(3,3)$
	$su(2,2) \simeq so(4,2)$
	$su(3,1) \simeq so^*(6)$
	$su^*(4) \simeq so(5,1)$

(1) G_2 有一个非紧实形 $\mathfrak{g}_0$. 满足

$$\mathfrak{g}_0 \cap G_{2u} \simeq su(2) \oplus su(2).$$

(2) F_4 有两个非紧实形 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$. 满足

$$\mathfrak{g}_1 \cap F_{4u} \simeq sp(6) \oplus su(2),$$

$$\mathfrak{g}_2 \cap F_{4u} \simeq so(9,R).$$

(3) E_6 有四个非紧实形 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ 和 $\mathfrak{g}_4$. 满足

$$\mathfrak{g}_1 \cap E_{6u} \simeq sp(8),$$

$$\mathfrak{g}_2 \cap E_{6u} \simeq su(6),$$

$$\mathfrak{g}_3 \cap E_{6u} \simeq so(10,R) \oplus R,$$

$$\mathfrak{g}_4 \cap E_{6u} \simeq F_{4u}.$$

(4) E_7 有三个非紧实形 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 和 $\mathfrak{g}_3$. 满足

$$\mathfrak{g}_1 \cap E_{7u} \simeq su(8),$$
$$\mathfrak{g}_2 \cap E_{7u} \simeq so(12, R) \oplus su(2),$$
$$\mathfrak{g}_3 \cap E_{7u} \simeq E_{6u} \oplus R.$$

(5) E_8 有两个非紧实形 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$. 满足

$$\mathfrak{g}_1 \cap E_{8u} \simeq so(16, R),$$
$$\mathfrak{g}_2 \cap E_{8u} \simeq E_{7u} \oplus su(2).$$

实经典李代数间同构关系除 $so^*(8) \simeq so(6,2)$ 外，其他均来自复经典李代数间同构关系，见表 1.2.

1.4 李代数的表示

在本节中首先给出李代数表示的定义及基本性质，接着讨论半单李代数有限维不可约表示的基本性质，最后讨论求表示的张量基方法，并简述 $so(3)$ 的不可约表示和约化系数求法.

1.4.1 表示定义及基本性质

设 $l(V)$ 是线性空间 V 上的线性变换构成的李代数，即是一般线性代数 $gl(V)$ 的子代数， $l(V) \subset gl(V)$. 若存在由李代数 $\mathfrak{g}$ 到 $l(V)$ 上的同态映射 ρ, 即 ρ 保持李代数的运算规律不变, 对 $x, y \in \mathfrak{g}$, $c, c' \in C$ 有

$$\begin{aligned} &(1) \quad \rho(cx + c'y) = c\rho(x) + c'\rho(y), \\ &(2) \quad \rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)], \end{aligned} \tag{1.65}$$

则称 ρ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 (线性) 表示. V 称为表示空间， V 的维数 n , 称为表示 ρ 的维数.

若由 $\mathfrak{g}$ 到 $l(V)$ 的映射 ρ 是同构映射，则称 ρ 是忠实表示.

如前面讨论过的伴随表示，即是以李代数 $\mathfrak{g}$ 本身为表示空间，按式 (1.6) 定义 ρ 为内导子运算 ad，所得到的一个表示，而且是忠实表示.

设 ρ_1 和 ρ_2 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，表示空间均为 V，若有 V 上非奇异矩阵 P，对任意 $x \in \mathfrak{g}$，满足 $P\rho_1(x)P^{-1} = \rho_2(x)$，则称表示 ρ_1 和 ρ_2 等价.

设 ρ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，相应的表示空间为 V，若 V 存在 $\mathfrak{g}$ 不变的子空间 $W \subset V$，即对任意 $x \in \mathfrak{g}$，有 $\rho(x)W \subseteq W$，则称表示 ρ 是可约表示. 当 ρ 是可约表示时，如不变子空间 W 的补空间 W' 也是 $\mathfrak{g}$ 的不变子空间，则称 ρ 是完全可约表示. 此时 $V = W \oplus W'$，设 ρ_w 和 $\rho_{w'}$ 分别是 $\mathfrak{g}$ 在 W 和 W' 上的表示，则对任意 $v_w \in W$，$v_{w'} \in W'$，$x \in \mathfrak{g}$，有

$$\rho(x)(v_w + v_{w'}) = \rho_w(x)v_w + \rho_{w'}(x)v_{w'},$$

即完全可约表示 ρ 可以约化为表示 ρ_w 和 $\rho_{w'}$ 的直和. 当 W' 不是不变子空间时，则称 ρ 是可约而不完全可约表示. 当 V 中不存在 $\mathfrak{g}$ 的任何不变子空间时，则称 ρ 是不可约表示.

设 $\mathfrak{g}$ 为代数，对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$，$c, c' \in C$，定义共轭运算 $\dagger$，满足：

$$\begin{aligned} &(1) \quad (x^\dagger)^\dagger = x, \\ &(2) \quad (cx + c'y)^\dagger = c^* x^\dagger + c'^* y^\dagger, \\ &(3) \quad (xy)^\dagger = y^\dagger x^\dagger. \end{aligned} \tag{1.66}$$

一般讲 $\mathfrak{g}$ 并不一定存在共轭运算，存在共轭运算的代数称为对称代数. 如 $x^\dagger = x$，则称元素 x 是厄米的. 共轭运算也称厄米共轭运算.

在内积空间 V 上，对 V 中任意态矢 $|\,\rangle$ 和 V^* 任意刁矢 $\langle\,|$，线性变换 x 的共轭运算常定义为

$$\langle x^\dagger \phi | \psi \rangle = \langle \phi | x\psi \rangle. \tag{1.67}$$

此定义与式 (1.66) 是一致的. 且满足

$$\langle\phi|x|\psi\rangle^* = \langle\psi|x^\dagger|\phi\rangle.$$

设 ρ 是对称李代数 $\mathfrak{g}$ 在内积空间 V 的表示, 若对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 有

$$\rho(x^\dagger) = \rho(x)^\dagger, \tag{1.68}$$

则称 ρ 为 $\mathfrak{g}$ 的星表示或厄米表示.

对称李代数在内积空间的厄米表示可约则完全可约. 当李代数到相应的单连通李群指数映射含 i 时, 李代数的厄米表示对应李群的酉表示. 当李代数到相应的单连通李群指数映射不含 i 时, 李代数的反厄米表示 $\rho(x^\dagger) = -\rho(x)^\dagger$ 对应李群的酉表示. 它们都具有完全可约性.

Schur 引理: 设 ρ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 在空间 V 上的一个不可约表示, 则与全部 $\rho(\mathfrak{g})$ 可交换的 V 上线性变换

$$C(\rho) = \{x \in gl(V)|[x, \rho(\mathfrak{g})] = 0\}$$

必为常数变换, 即 $C(\rho) = cE_V$,c 为常数, E_V 为 V 上恒等变换.

1.4.2 半单李代数的表示

已知半单李代数 $\mathfrak{g}$ 可作 Cartan 分解, 记 $N_+ = \oplus_{\alpha>0}\mathfrak{g}^\alpha$, $N_- = \oplus_{\alpha<0}\mathfrak{g}^\alpha$, 其 Cartan 分解可写成

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus N_+ \oplus N_-.$$

$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, N_+ 和 N_- 分别是 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数. 设 $\mathfrak{g}$ 在空间 V 上的表示为 ρ, λ 是 $\mathfrak{h}$ 的线性泛函. 取

$$V_\lambda = \{v \in V|\rho(H)v = \lambda(H)v, \ \ H \in \mathfrak{h}\}, \tag{1.69}$$

V_λ 是 V 的一个子空间. 当 $V_\lambda \neq \{0\}$ 时, 称 λ 为表示 ρ 的一个权, V_λ 中非零向量 v 称为相应于权 λ 的权向量. V_λ 的维数称为权 λ 的重数. 当 V_λ 为一维时, 称 λ 为单权.

取 $\mathfrak{h}$ 的基为 $\{H_1, H_2, \cdots, H_r\}$. 可以用 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 中向量 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$ 来表示权 λ，其中

$$\lambda_i = \lambda(H_i), \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{1.70a}$$

相应于权 λ 的权向量 v 是 $H_1, H_2, \cdots, H_r$ 的共同本征矢，本征值为权的各个分量，即

$$\rho(H_i)v = \lambda_i v, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{1.70b}$$

设 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 在表示空间 V 的一个不可约表示，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的素根系，则有以下定理：

(1) V 可分解成具有一定权 λ 的子空间 V_λ 直和. 设 D 是不可约表示 ρ 权的全体，有

$$V = \oplus_D V_\lambda,$$

即 V_λ 是权 λ 的权子空间.

(2) 设 λ 是 ρ 的权，α 是 $\mathfrak{g}$ 的根，则 $2(\lambda\cdot\alpha)/(\alpha\cdot\alpha)$ 是整数，且 $\lambda - 2\alpha(\lambda\cdot\alpha)/(\alpha\cdot\alpha)$ 也是 ρ 的权，并与 λ 有相同的重数.

(3) 设 $h_{\alpha_i}, e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 是 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley 基生成元，则存在唯一的单权 Λ，满足

$$e_{\alpha_i} v_\Lambda = 0, \ \ i = 1, 2, \cdots, r. \tag{1.71}$$

Λ 称为 $\mathfrak{g}$ 在表示 ρ 的最高权.

半单李代数的最高权定理：设 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的有限维不可约表示，则

(1) 有唯一的最高权 Λ. 并且最高权是单的，即 V_Λ 是一维的；

(2) 两个不可约表示 ρ_1 和 ρ_2 等价的充分必要条件是其最高权 Λ_1 和 Λ_2 相等；

(3) 在 Chevalley 基下，用 $\lambda_i = \Lambda_{\alpha_i} = 2(\Lambda \cdot \alpha_i)/(\alpha_i \cdot \alpha_i)$ 标记最高权，则 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$ 是最高权的充分必要条件是 $\lambda_i \in Z_+$，$i = 1, 2, \cdots, r$，即 λ_i 为非负整数.

由于最高权定理给出半单李代数不可约表示和最高权有一一对应关系，所以常用最高权来标记不可约表示. 当然最高权的具体数值与半单李代数基的选择和素根系的取法有关. 在 Chevalley 基下，可将最高权的各个分量标在 Dynkin 图相应的素根上，代表该不可约表示.

半单李代数的任一表示是完全可约的. 这是 Weyl 的著名定理，它在求半单李代数的表示中将起重要作用.

设 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的有限维不可约表示，Λ 是最高权，$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 的正根和之半，则表示 ρ 的维数为

$$\mathrm{d} = \dim(V) = \prod_{\alpha>0} \frac{((\Lambda + \delta) \cdot \alpha)}{(\delta \cdot \alpha)}. \tag{1.72}$$

半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型不退化，即 $\det|g_{i\,j}| \neq 0$，设 $(g_{i\,j})$ 的逆矩阵为 $(g^{i\,j})$. 对 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 可以定义 Casimir 算子为

$$C_2 = \sum_{i\,j} g^{i\,j} \rho(x_i) \rho(x_j). \tag{1.73a}$$

Casimir 算子 C_2 可以和表示 ρ 中的所有 $\mathfrak{g}$ 的元素对易. 当半单李代数是由代数诱导而来时，可以直接定义 Casimir 算子为

$$C_2 = \sum_{i\,j} g^{i\,j} x_i x_j. \tag{1.73b}$$

Casimir 算子 C_2 可以和所有 $\mathfrak{g}$ 的元素对易，是 $\mathfrak{g}$ 的不变量.

1.4.3 经典李代数的不可约表示

先看李代数 $A_n = sl(n+1, C)$，设在 Chevalley 基下，用不可约表示的最高权 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 标记表示，见图 1.3.

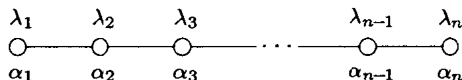


图 1.3 A_n 的不可约表示

取 $n+1$ 个数 $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{n+1} \geq 0$, 组成划分 $\Gamma_{n+1} = [m_1, m_2, \cdots, m_{n+1}]$. 图 1.4 给出它对应的杨图. $sl(n+1, C)$ 的表示也常用划分 Γ_{n+1} 来标记.

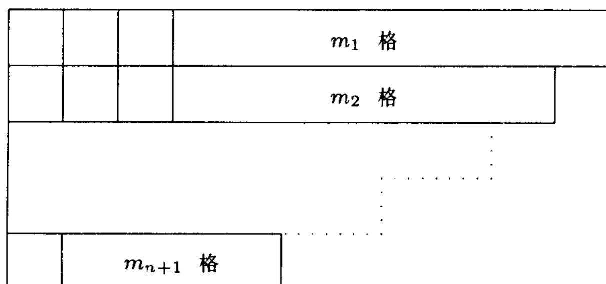


图 1.4 Γ_{n+1} 对应的杨图

同一个不可约表示的两种标记间满足关系,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= m_1 - m_2, \\
\lambda_2 &= m_2 - m_3, \\
&\vdots \\
\lambda_n &= m_n - m_{n+1}.
\end{aligned} \tag{1.74}$$

可用下面两个公式计算 A_n 不可约表示 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的维数,

$$\mathrm{d}(A_n) = \prod_{j,i} \left(1 + \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_{i+j}}{j+1}\right), \tag{1.75a}$$

其中 $j=0,1,\cdots,n-1$, $i=1,2,\cdots,n-j$.

$$\mathrm{d}(A_n)=\prod_{j,i}\left(1+\frac{\lambda_i+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_j}{j+1-i}\right), \tag{1.75b}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$, $i=1,2,\cdots,j$.

注意上面两个公式是 Chevallley 基下的维数. 在用其他基标记表示时, 必须将基变换成 Chevalley 基之后才能用上公式. 同样以下给出的维数公式也是 Chevalley 基下的维数.

对李代数 B_n, 设在 Chevalley 基下, 用最高权 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 标记不可约表示, 见图 1.5.

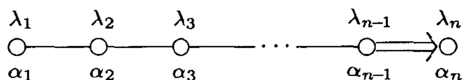


图 1.5 B_n 的不可约表示

若其 Cartan 子代数的 Cartan-Weyl 基为 $\{H_1,H_2,\cdots,H_n\}$, 也可用此基下的最高权 $(\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_n)$ 来标记该不可约表示. 不同标记间有关系:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= (2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2,\\
\Lambda_2 &= (2\lambda_2+2\lambda_3+\cdots+2\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2,\\
&\vdots\\
\Lambda_{n-1} &= (2\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2,\\
\Lambda_n &= \lambda_n/2,
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Gelfand 就是用 $(\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_n)$ 来标记 $o(2n+1)$ 的不可约表示的. 由于 λ_i 是非负整数, 所以 $\Lambda_1\geq\Lambda_2\geq\cdots\geq\Lambda_n\geq0$. 并且当 λ_n 为偶数时, 所有 Λ_i 为整数, 称为张量表示, 当 λ_n 为奇数时, 所有 Λ_i 为半整数, 称为旋量表示.

B_n 不可约表示 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的维数为

$$\mathrm{d}(B_n) = \mathrm{d}(A_n) \prod_{j,i} \left(1 + \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \cdots + 2\lambda_j + \cdots + 2\lambda_{n-1} + \lambda_n}{2n+1-i-j}\right), \tag{1.77}$$

其中 $j = 1, 2, \cdots, n-1$, $i = 1, 2, \cdots, j$, $\mathrm{d}(A_n)$ 是 A_n 不可约表示 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的维数.

对李代数 C_n, 设在 Chevalley 基下, 用最高权 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 标记不可约表示, 见图 1.6.

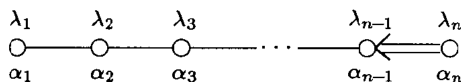


图 1.6 C_n 的不可约表示

若其 Cartan 子代数的 Cartan-Weyl 基为 $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$, 也可用此基下的最高权 $(\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_n)$ 来标记该不可约表示. 不同标记间有关系:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \\
\Lambda_2 &= \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n, \\
&\vdots \\
\Lambda_{n-1} &= \lambda_{n-1} + \lambda_n, \\
\Lambda_n &= \lambda_n,
\end{aligned} \tag{1.78}$$

由于 λ_i 是非负整数, 所以 $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \cdots \geq \Lambda_n \geq 0$. 并且所有 Λ_i 为整数.

C_n 不可约表示 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的维数为

$$\mathrm{d}(C_n) = \mathrm{d}(A_n) \prod_{j,i} \left(1 + \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \cdots + 2\lambda_j + \cdots + 2\lambda_n}{2n+2-i-j}\right), \tag{1.79}$$

其中 $j=2,3,\cdots,n$, $i=1,2,\cdots,j-1$, $\mathrm{d}(A_n)$ 是 A_n 不可约表示 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 的维数.

最后讨论李代数 D_n, 设在 Chevalley 基下, $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 是标记不可约表示的最高权, 见图 1.7.

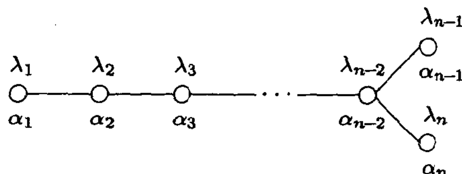


图 1.7 D_n 的不可约表示

若其 Cartan 子代数的 Cartan-Weyl 基为 $\{H_1,H_2,\cdots,H_n\}$, 也可用此基下的最高权 $(\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_n)$ 来标记该不可约表示. 不同标记间有关系:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= (2\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+2\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2,\\
\Lambda_2 &= (2\lambda_2+2\lambda_3+\cdots+2\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2,\\
&\ \vdots \\
\Lambda_{n-1} &= (\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2,\\
\Lambda_n &= (-\lambda_{n-1}+\lambda_n)/2,
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Gelfand 就是用 $(\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_n)$ 来标记 $o(2n)$ 的不可约表示的. 由于 λ_i 是非负整数, 所以 $\Lambda_1\geq\Lambda_2\geq\cdots\geq\Lambda_{n-1}\geq|\Lambda_n|\geq 0$. 并且当 $\lambda_{n-1}+\lambda_n$ 为偶数时, 所有 Λ_i 为整数, 称为张量表示, 当 $\lambda_{n-1}+\lambda_n$ 为奇数时, 所有 Λ_i 为半整数, 称为旋量表示.

D_n 不可约表示 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 的维数为,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(D_n)=&\frac{2\mathrm{d}(A_n)}{2+\lambda_{n-1}+\lambda_n}\prod_k\left(1+\frac{\lambda_k+\lambda_{k+1}+\cdots+\lambda_{n-2}+\lambda_n}{n-k}\right)\\
&\times\prod_{j,i}\left(1+\frac{\lambda_i+\lambda_{i+1}+\cdots+2\lambda_j+\cdots+2\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n}{2n-i-j}\right),
\end{aligned} \tag{1.81}$$

其中 $k=1,2,\cdots,n-2$, $j=2,3,\cdots,n-2$, $i=1,2,\cdots,j-1$, $\mathrm{d}(A_n)$ 是 A_n 不可约表示 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 的维数.

1.5 用张量基方法求半单李代数的表示

本节先讨论直积表示，不可约张量和推广的 Wigner-Eckart 定理. 并简述求 $so(3)$ 不可约表示和约化系数的方法.

1.5.1 直积表示和不可约张量

设 ρ_1, ρ_2 是李代数 $\mathfrak{g}$ 在空间 V_1, V_2 的表示，对 $x\in\mathfrak{g}$, $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, 定义直积表示 $\rho_1\otimes\rho_2$ 满足

$$(\rho_1\otimes\rho_2)(x)(v_1\otimes v_2)=(\rho_1(x)v_1)\otimes v_2+v_1\otimes(\rho_2(x)v_2). \tag{1.82}$$

即使 ρ_1 和 ρ_2 是不可约表示，一般直积表示是可约的.

若 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，可用最高权来标记不可约表示，设 Γ_1 和 Γ_2 是 $\mathfrak{g}$ 在有限维空间 V_1 和 V_2 的不可约表示，则直积表示 $\Gamma_1\otimes\Gamma_2$ 是完全可约的，即

$$\Gamma_1\otimes\Gamma_2\cong\oplus_\Gamma\, m_\Gamma\Gamma, \tag{1.83a}$$

其中 Γ 是空间 V_Γ 上的不可约表示， m_Γ 是表示 Γ 出现的次数，称为 Γ 在 $\Gamma_1\otimes\Gamma_2$ 的重复度. 当重复度均为 1 时，称 $\Gamma_1\otimes\Gamma_2$ 是简单约化的. 最高的 Γ 为 $\hat{\Gamma}=\Gamma_1+\Gamma_2$, 并且重复度为 1, 即 $m_{\hat{\Gamma}}=1$. 在直积空间 $V_1\otimes V_2$ 上有非奇异算符 C 存在，使

$$\begin{aligned}C(\Gamma_1\otimes\Gamma_2)C^{-1}&=\oplus_\Gamma\, m_\Gamma\Gamma,\\ C(V_1\otimes V_2)&=\oplus_\Gamma\, m_\Gamma V_\Gamma.\end{aligned} \tag{1.83b}$$

算符 C 的矩阵元称为 Clebsh-Gordan 系数，简称 CG 系数，在物理学中经常用到.

设 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单李代数， Γ_1 和 Γ_2 是 $\mathfrak{g}$ 在有限维内积空间 V_1 和 V_2 的不可约厄米表示，直积表示 $\Gamma_1\otimes\Gamma_2\cong\oplus_\Gamma\, m_\Gamma\Gamma$. 取

$\left|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\ \alpha_1\end{matrix}\right\rangle$, $\left|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle$, 和 $\left|\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\right\rangle$ 为表示空间 V_1, V_2, 和 V_Γ 的正交归一基，其中大写的 Γ 代表最高权，小写的 γ 代表权， α 代表其他简并量子数，用以解除权空间 V_γ 的简并. β 用来标记非简单约化时多次出现的表示 Γ, 其值为 $\beta=1,\cdots,m_\Gamma$, 则 $V_1\otimes V_2$ 空间的基可以写为

$$\left|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle=\left|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\ \alpha_1\end{matrix}\right\rangle\otimes\left|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle.$$

CG 系数可以写为 $\left\langle\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle$, 其中刁矢代表相应对偶空间的基. 且

$$\left|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle=\sum_{\beta\Gamma\gamma\alpha}\left\langle\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle\left|\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left|\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\right\rangle=\sum_{\gamma_1\alpha_1\gamma_2\alpha_2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\middle|\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle. \tag{1.84}$$

CG 系数满足正交归一性

$$\sum_{\beta\Gamma\gamma\alpha}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1'\ \alpha_1' & \gamma_2'\ \alpha_2'\end{matrix}\middle|\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\right\rangle\left\langle\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\delta_{\gamma_1'\,\gamma_1}\delta_{\gamma_2'\,\gamma_2}\delta_{\alpha_1'\,\alpha_1}\delta_{\alpha_2'\,\alpha_2},$$
$$\tag{1.85}$$
$$\sum_{\gamma_1\alpha_1\gamma_2\alpha_2}\left\langle\beta'\ \begin{matrix}\Gamma'\\ \gamma'\ \alpha'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\alpha_1 & \gamma_2\alpha_2\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\alpha_1 & \gamma_2\alpha_2\end{matrix}\middle|\beta\ \begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\delta_{\beta'\,\beta}\delta_{\Gamma'\,\Gamma}\delta_{\gamma'\,\gamma}\delta_{\alpha'\,\alpha}.$$

设 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的素根系， $h_{\alpha_i},e_{\alpha_i},e_{-\alpha_i},i=1,\cdots,r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley 基生成元. 采用物理学上惯例，李代数到李群的指数映射含 i, 则紧致半单李代数有

$$
\begin{aligned}
h_{\alpha_i}^{\dagger} &= h_{\alpha_i}, \\
e_{\alpha_i}^{\dagger} &= e_{-\alpha_i}, \\
e_{-\alpha_i}^{\dagger} &= e_{\alpha_i}.
\end{aligned}
\tag{1.86}
$$

以下为简单起见，用生成元代表生成元的表示矩阵. 应用厄米表示条件，计算 $\left\langle \beta \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma\ \alpha \end{matrix} \middle| h_{\alpha_i} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2 \end{matrix} \right\rangle$ 可得 CG 系数满足的选择定则

$$
\begin{aligned}
&\gamma_i \left\langle \beta \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma\ \alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad = (\gamma_{1\,i} + \gamma_{2\,i}) \left\langle \beta \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma\ \alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2 \end{matrix} \right\rangle, \quad i = 1, \cdots, r.
\end{aligned}
\tag{1.87}
$$

计算 $\left\langle \beta \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma\ \alpha \end{matrix} \middle| e_{-\alpha_i} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2 \end{matrix} \right\rangle$，可得 CG 系数的递推关系，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha'} \left\langle \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma\ \alpha \end{matrix} \middle| e_{-\alpha_i} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma + \alpha_i\ \alpha' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \beta \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma + \alpha_i\ \alpha' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2 \end{matrix} \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha_1'} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \gamma_1 - \alpha_i\ \alpha_1' \end{matrix} \middle| e_{-\alpha_i} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \gamma_1\ \alpha_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \beta \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma\ \alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 - \alpha_i\ \alpha_1' & \gamma_2\ \alpha_2 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad + \sum_{\alpha_2'} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \gamma_2 - \alpha_2\ \alpha_2' \end{matrix} \middle| e_{-\alpha_i} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \gamma_2\ \alpha_2 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \beta \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma\ \alpha \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1\ \alpha_1 & \Gamma_2 - \alpha_i\ \alpha_2' \end{matrix} \right\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.88}
$$

这是对确定表示的 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, 从权 γ 推到权 $\gamma + \alpha_i$ 的递推关系. 因为是厄米表示，用 e_{α_i} 作用得到的递推关系是不独立的.

在简单约化时，从式 (1.88) 可以推出 CG 系数所满足的全部独立的线性齐次方程，从而决定 CG 系数到差一常数. 再利用 CG 系数的正交归一性，并规定相因子，即可求出全部 CG 系数.

在非简单约化时，式 (1.88) 可以决定 CG 系数到差 m_Γ 个常数．再利用正交归一条件，即可求出 m_Γ 组 CG 系数．下节将以 $sp(4)$ 为例，说明非简单约化时 CG 系数的求法．

关于不可约张量，Wigner 是从李群角度定义的，此与 Racah 从李代数角度的定义是等价的．在此我们用 Racah 的定义．

设 ρ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维不可约表示，对任意 $x \in \mathfrak{g}$，若算符组 $\{T^{\rho}_{\gamma\,\alpha}\}$，对 $(\gamma\,\alpha),(\gamma'\,\alpha') = 1,\cdots,\dim(\rho)$，满足

$$[x, T^{\rho}_{\gamma\,\alpha}] = \sum_{\gamma',\alpha'} (\rho(x))_{\gamma'\alpha'\ \gamma\alpha} T^{\rho}_{\gamma'\ \alpha'}, \tag{1.89a}$$

则称算符组 $\{T^{\rho}_{\gamma\,\alpha}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的秩为 ρ 的不可约张量．

设 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单李代数，Γ_1, Γ_2 和 Γ 是 $\mathfrak{g}$ 在有限维内积空间 V_1, V_2 和 V 的不可约厄米表示． $h_{\alpha_i}, e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}$, $i = 1,\cdots,r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Chevalley 基生成元．若算符组 $T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\,\alpha_1}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的秩为 Γ_1 的不可约张量，则有

$$\begin{aligned}
[h_{\alpha_i}, T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\,\alpha_1}] &= \sum_{\gamma_1'\,\alpha_1'} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1'\,\alpha_1' \end{array} \middle| h_{\alpha_i} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1\,\alpha_1 \end{array} \right\rangle T^{\Gamma_1}_{\gamma_1'\,\alpha_1'}, \\
[e_{\pm\alpha_i}, T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\,\alpha_1}] &= \sum_{\gamma_1'\,\alpha_1'} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1'\,\alpha_1' \end{array} \middle| e_{\pm\alpha_i} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1\,\alpha_1 \end{array} \right\rangle T^{\Gamma_1}_{\gamma_1'\,\alpha_1'}.
\end{aligned} \tag{1.89b}$$

取 $\left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma\,\alpha \end{array} \right|$ 和 $\left| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2\,\alpha_2 \end{array} \right\rangle$ 分别左乘和右乘于式 (1.89b)，设 $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \cong \oplus_\Gamma m_\Gamma \Gamma$，可得矩阵元满足的方程

$$\gamma_i \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma\,\alpha \end{array} \middle| T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\,\alpha_1} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2\,\alpha_2 \end{array} \right\rangle = (\gamma_{1\,i} + \gamma_{2\,i}) \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma\,\alpha \end{array} \middle| T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\,\alpha_1} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2\,\alpha_2 \end{array} \right\rangle, \tag{1.90a}$$

$$\sum_{\alpha'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|e_{-\alpha_i}\middle|\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma+\alpha_i\ \alpha'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma+\alpha_i\ \alpha'\end{matrix}\middle|T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\ \alpha_1}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sum_{\alpha_1'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1-\alpha_i\ \alpha_1'\end{matrix}\middle|e_{-\alpha_i}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1\\ \gamma_1\ \alpha_1\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|T^{\Gamma_1}_{\gamma_1-\alpha_i\ \alpha_1'}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle$$
$$+\sum_{\alpha_2'}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2-\alpha_2\ \alpha_2'\end{matrix}\middle|e_{-\alpha_i}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\ \alpha_1}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2-\alpha_i\ \alpha_2'\end{matrix}\right\rangle.$$
(1.90b)

式 (1.87),(1.88),(1.90) 说明对确定的表示 $\Gamma,\Gamma_1;\Gamma_2$, 矩阵元 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\ \alpha_1}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle$ 与 CG 系数 $\left\langle\beta\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle$ 满足同样的选择定则和递推关系.

因此对确定的表示 Γ, 在 $\Gamma_1\otimes\Gamma_2$ 是简单约化时, 矩阵元与 CG 系数满足同样的线性齐次方程, 并且可以决定 CG 系数和矩阵元到差一常数. 用约化矩阵元 $\langle\Gamma\|T^{\Gamma_1}\|\Gamma_2\rangle$ 代表具有确定表示的常数, 此时没有代表重复度的量子数 β, 即得 Winger-Eckart 定理

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|T^{\Gamma_1}_{\gamma_1\ \alpha_1}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle =\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle\langle\Gamma\|T^{\Gamma_1}\|\Gamma_2\rangle. \tag{1.91}$$

对确定的表示 Γ, 在 $\Gamma_1\otimes\Gamma_2$ 是非简单约化时, 由于矩阵元与 CG 系数满足同样的线性齐次方程, 而 CG 系数有 m_Γ 个线性独立的解, 因此矩阵元必为此 m_Γ 个 CG 系数的线性叠加, 即

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\middle|T^{\Gamma_1}_{\Gamma_1\ \alpha_1}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2\\ \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\right\rangle =\sum_{\beta=1}^{m_\Gamma}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \gamma_1\ \alpha_1 & \gamma_2\ \alpha_2\end{matrix}\middle|\beta\begin{matrix}\Gamma\\ \gamma\ \alpha\end{matrix}\right\rangle\langle\beta\Gamma\|T^{\Gamma_1}\|\Gamma_2\rangle. \tag{1.92}$$

叠加系数 $\langle\beta\Gamma\|T^{\Gamma_1}\|\Gamma_2\rangle$ 也与分量指标无关，此可以看作推广的 Wigner-Eckart 定理.

在求李代数的表示中， Wigner-Eckart 定理起重要作用. 以后会看到，对李代数取适当的基，并应用 Wigner-Eckart 定理，我们称之为张量基方法，可以简化求表示的计算，在数学物理中有许多应用.

1.5.2 $so(3)$ 的不可约表示

$so(3)$ 是单李代数 $A_1 \simeq B_1 \simeq C_1$ 的紧致实形，在物理中经常用到. 习惯取其生成元为厄米算符 J_1, J_2, J_3，满足对易关系式 (1.54b). 在求表示等具体计算中，常取生成元为

$$\begin{aligned} &J_0 = J_3, \\ &J_{\pm 1} = \mp(J_1 \pm \mathrm{i}J_2)/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{1.93}$$

满足对易关系

$$\begin{aligned} &[J_0, J_{\pm 1}] = \pm J_{\pm 1}, \\ &[J_{+1}, J_{-1}] = -J_0. \end{aligned} \tag{1.94}$$

在厄米共轭运算下有

$$\begin{aligned} &J_0^\dagger = J_0, \\ &J_{\pm 1}^\dagger = -J_{\mp 1}, \end{aligned} \tag{1.95}$$

其 Casimir 算子为 $J^2 = J_0^2 - J_{+1}J_{-1} - J_{-1}J_{+1}$.

J_0 为其 Cartan 子代数， J_{+1} 是对应正根的生成元. 用最高权 j 标记 $so(3)$ 的有限维不可约表示. 设不可约表示空间的基为 $|j\ m\rangle$，则有 $J_0|j\ m\rangle = m|j\ m\rangle$. 从对易关系可得

$$J_0 J_{\pm 1}|j\ m\rangle = (m \pm 1)J_{\pm 1}|j\ m\rangle$$

和递推关系

$$\begin{aligned} &\langle j\ m|J_{+1}|j\ m-1\rangle\langle j\ m-1|J_{-1}|j\ m\rangle \\ &\quad = \langle j\ m+1|J_{+1}|j\ m\rangle\langle j\ m|J_{-1}|j\ m+1\rangle - m. \end{aligned} \tag{1.96a}$$

由 $so(3)$ 是紧致实形，所以其有限维表示是厄米表示，应用厄米表示条件

$$\langle j\,m|J_{+1}|\,j\,m-1\rangle = -\langle j\,m-1|J_{-1}|\,j\,m\rangle^*,$$

可得从权 $m+1$ 态推到权为 m 的态，J_{-1} 矩阵元绝对值平方的递推关系

$$\begin{aligned}&|\,\langle j\,m-1|J_{-1}|\,j\,m\rangle\,|^2\\&\quad=|\,\langle j\,m|J_{-1}|\,j\,m+1\rangle\,|^2+m.\end{aligned}\tag{1.96b}$$

可看出递推关系只能确定矩阵元的绝对值，按惯例取

$$\begin{aligned}\langle j\,m-1|J_{-1}|\,j\,m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)/2},\\ \langle j\,m+1|J_{+1}|\,j\,m\rangle &= -\sqrt{(j-m)(j+m+1)/2},\end{aligned}\tag{1.97}$$

其中 $m=-j,-j+1,\cdots,j-1,j$, j 可取非负整数或半整数.

考虑到 $so(3)$ 两个不可约表示 j_1 和 j_2 直积是简单约化的，设 $j_1\otimes j_2=\oplus_{|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\,j$, 则这些表示空间基之间关系可用 CG 系数表示出来

$$\begin{aligned}|\,j_1\,m_1\,j_2\,m_2\rangle &= \sum_{j\,m}\langle j\,m|\,j_1\,m_1\,j_2\,m_2\rangle|\,j\,m\rangle,\\ |\,j\,m\rangle &= \sum_{m_1\,m_2}\langle j_1\,m_1\,j_2\,m_2|\,j\,m\rangle|\,j_1\,m_1\,j_2\,m_2\rangle.\end{aligned}$$

CG 系数满足正交归一关系

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1\,m_2}\langle j'\,m'|\,j_1\,m_1\,j_2\,m_2\rangle\langle j_1\,m_1\,j_2\,m_2|\,j\,m\rangle = \delta_{j\,j'}\delta_{m\,m'},\\ &\sum_{j\,m}\langle j_1\,m_1'\,j_2\,m_2'|\,j\,m\rangle\langle j\,m|\,j_1\,m_1\,j_2\,m_2\rangle = \delta_{m_1\,m_1'}\delta_{m_2\,m_2'}.\end{aligned}\tag{1.98}$$

利用对易关系，可求出 CG 系数 $\langle j_1\,m_1\,j_2\,m_2|\,j\,m\rangle$ 的选择定则为

$m = m_1 + m_2$, 其递推关系为

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j\, m+1\rangle \\
&\quad = \sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)}\langle j_1\, m_1-1\, j_2\, m_2 |\, j\, m\rangle \\
&\qquad + \sqrt{(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2-1 |\, j\, m\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.99a}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j\, m-1\rangle \\
&\quad = \sqrt{(j_1-m_1)(j_1+m_1+1)}\langle j_1\, m_1+1\, j_2\, m_2 |\, j\, m\rangle \\
&\qquad + \sqrt{(j_2-m_2)(j_2+m_2+1)}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2+1 |\, j\, m\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.99b}
$$

首先求 $m = j$ 时的 CG 系数 $\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j\, j\rangle$. 由式 (1.99a) 可得从 m_1 大推到 m_1 小的递推关系

$$
\begin{aligned}
&\langle j_1\, m_1-1\, j_2\, m_2 |\, j\, j\rangle \\
&\quad = -\sqrt{\frac{(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)}{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)}}\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2-1 |\, j\, j\rangle.
\end{aligned}
$$

于是所有 $m = j$ 的 CG 系数可用 CG 系数 $\langle j_1\, j_1\, j_2\, j-j_1 |\, j\, j\rangle$ 表示出来. 注意递推关系只是 CG 系数的齐次方程, 所以只能确定 CG 系数到差一常数. 再利用正交归一性可以确定 CG 系数的绝对值. 一般取 CG 系数为实数, 其正负号则需通过惯例另行规定. 在 $so(3)$ 中常采用 Condon-Shortley 惯例, 取

$$
\langle j_1\, j_1\, j_2\, j-j_1 |\, j\, j\rangle > 0,
$$

于是便可得到全部 CG 系数 $\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j\, j\rangle$. 再利用递推关系 (1.99b), 即可求出全部 CG 系数.

在 Condon-Shortley 惯例下，利用递推关系可以证明 CG 系数满足以下对称性

$$\begin{aligned}
\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j_3\, m_3\rangle &= (-)^{j_1+j_2-j_3}\langle j_2\, m_2\, j_1\, m_1 |\, j_3\, m_3\rangle, \\
\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j_3\, m_3\rangle &= (-)^{j_1+j_2-j_3}\langle j_1\; -m_1\, j_2\; -m_2 |\, j_3\; -m_3\rangle, \\
\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j_3\, m_3\rangle &= (-)^{j_1-m_1}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_2+1}}\langle j_1\, m_1\, j_3\, -m_3 |\, j_2\, -m_2\rangle.
\end{aligned} \tag{1.100}$$

两个不可约表示的 j_1 和 j_2 直积到不可约表示 j 的约化，与耦合体系的转动具有相同的结果. 设 $J_{1\,i}$ 和 $J_{2\,i}$ 分别为体系一和体系二的角动量，两个体系耦合在一起转动，体系总角动量为 $J_i = J_{1\,i} + J_{2\,i}$. 若 $[J_{1\,i}, J_{2\,j}] = 0$, $i, j = 0, \pm 1$. $|\, j_1\, m_1\rangle$, $|\, j_2\, m_2\rangle$, $|\, j\, m\rangle$ 分别为 $J_1^2, J_{1\,0}$, $J_2^2, J_{2\,0}$, J^2, J_0 的共同本征矢，则 CG 系数 $\langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j\, m\rangle$ 是耦合体系表象变换的矩阵元.

当三个体系耦合在一起时，不同耦合方式间的变换系数 $\langle (j_1\, j_2)j_{1\,2}, j_3, j |\, j_1, (j_2\, j_3)j_{2\,3}, j\rangle$ 称为 Racah 系数，

$$\begin{aligned}
&\langle (j_1\, j_2)j_{1\,2}, j_3, j |\, j_1, (j_2\, j_3)j_{2\,3}, j\rangle \\
&= \sum_{m_1 m_2} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 |\, j_{12}\, m_1+m_2\rangle \\
&\quad \times \langle j_{12}\, m_1+m_2\, j_3\, m-m_1-m_2 |\, j\, m\rangle \\
&\quad \times \langle j_2\, m_2\, j_3\, m-m_1-m_2 |\, j_{23} m-m_1\rangle \\
&\quad \times \langle j_1\, m_1\, j_{23}\, m-m_1 |\, j\, m\rangle,
\end{aligned} \tag{1.101a}$$

在物理学中经常用 Wigner 的 6–j 系数来表示三个角动量的耦合，它与 Racah 系数有下关系

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{1\,2} \\ j_3 & j & j_{2\,3} \end{Bmatrix} =& (-)^{j_1+j_2+j_3+j}\frac{1}{\sqrt{(2j_{1\,2}+1)(2j_{2\,3}+1)}} \\
&\times \langle (j_1\, j_2)j_{1\,2}, j_3, j |\, j_1, (j_2\, j_3)j_{2\,3}, j\rangle.
\end{aligned} \tag{101b}$$

其主要性质可参看文献 [5].

1.6 $sp(4)$ 的不可约表示

由 (1.42)(1.43), 取 C_2 的张量基如下:

$$
\begin{aligned}
&J_0 = (E_{1\,1} - E_{3\,3})/2,\\
&J_{+1} = -E_{1\,3}/\sqrt{2},\\
&J_{-1} = E_{3\,1}/\sqrt{2},\\
&L_0 = (E_{2\,2} - E_{4\,4})/2,\\
&L_{+1} = -E_{2\,4}/\sqrt{2},\\
&L_{-1} = E_{4\,2}/\sqrt{2},\\
&T_{1/2\;1/2\;1/2\;1/2} = E_{1\,4} + E_{2\,3},\\
&T_{1/2\;1/2\;1/2\;-1/2} = -E_{1\,2} + E_{4\,3},\\
&T_{1/2\;-1/2\;1/2\;1/2} = -E_{2\,1} + E_{3\,4},\\
&T_{1/2\;-1/2\;1/2\;-1/2} = -E_{4\,1} - E_{3\,2}.
\end{aligned}
\tag{1.102}
$$

张量基满足如下三组对易关系:

$$
\begin{aligned}
&[J_k, L_{k'}] = 0, \qquad k, k' = 0, \pm 1,\\
&[J_0, J_{\pm 1}] = \pm J_{\pm 1},\\
&[J_{+1}, J_{-1}] = -J_0,\\
&[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1},\\
&[L_{+1}, L_{-1}] = -L_0,
\end{aligned}
\tag{1.103a}
$$

这第一组对易关系说明 $J_0, J_{\pm 1}$ 和 $L_0, L_{\pm 1}$ 组成两个互相对易的 $so(3)_1$ 和 $so(3)_2$ 李代数.

$$
\begin{aligned}
&[J_0, T_{1/2\;p\,1/2\;q}] = pT_{1/2\;p\,1/2\;q}, \qquad p, q = \pm 1/2,\\
&[J_{\pm 1}, T_{1/2\;p\,1/2\;q}] = \mp\sqrt{(1/2 \mp p)(1/2 \pm p + 1)/2}\,T_{1/2\;p\pm 1/2\;1/2\;q},\\
&[L_0, T_{1/2\;p\,1/2\;q}] = qT_{1/2\;p\,1/2\;q},\\
&[L_{\pm 1}, T_{1/2\;p\,1/2\;q}] = \mp\sqrt{(1/2 \mp q)(1/2 \pm q + 1)/2}\,T_{1/2\;p\,1/2\;q\pm 1/2},
\end{aligned}
\tag{1.103b}
$$

这第二组对易关系说明 $T_{1/2\,p\,1/2\,q}$ 构成 $so(3)_1$ 和 $so(3)_2$ 的 1/2 秩不可约张量. 以后为书写简单，只记不可约张量的投影量子数，即 $T_{1/2\,p\,1/2\,q}=T_{p\,q}$,

$$
\begin{aligned}
&[T_{1/2\,1/2},T_{1/2\,-1/2}]=-2\sqrt{2}J_{+1},\\
&[T_{1/2\,1/2},T_{-1/2\,1/2}]=-2\sqrt{2}L_{+1},\\
&[T_{1/2\,1/2},T_{-1/2\,-1/2}]=-2L_0-2J_0,\\
&[T_{1/2\,-1/2},T_{-1/2\,1/2}]=-2L_0+2J_0,\\
&[T_{1/2\,-1/2},T_{-1/2\,-1/2}]=-2\sqrt{2}L_{-1},\\
&[T_{-1/2\,1/2},T_{-1/2\,-1/2}]=-2\sqrt{2}J_{-1},
\end{aligned}
\tag{1.103c}
$$

最后一组说明不可约张量间对易关系与 $so(3)_1$ 和 $so(3)_2$ 生成元间关系. 定义耦合张量为

$$
\begin{aligned}
&(T\,T)_{\tilde{j}\,\tilde{p}\,\tilde{l}\,\tilde{q}}\\
&=\sum_{p\,p'\,q\,q'}\langle 1/2\,p\,1/2\,p'|\,\tilde{j}\,\tilde{p}\rangle\langle 1/2\,q\,1/2\,q'|\,\tilde{l}\,\tilde{q}\rangle T_{p\,q}T_{p'\,q'},
\end{aligned}
$$

其中 $\langle 1/2\,p\,1/2\,p'|\,\tilde{j}\,\tilde{p}\rangle$ 和 $\langle 1/2\,q\,1/2\,q'|\,\tilde{l}\,\tilde{q}\rangle$ 分别为 $so(3)_1$ 和 $so(3)_2$ 的 Clebsh-Gordon 系数，简称 CG 系数. 代入具体 CG 系数，可将式 (1.103c) 用耦合张量形式表示

$$
\begin{aligned}
&(T\,T)_{1\,k\,0\,0}=-2J_k,\qquad k=0,\pm 1,\\
&(T\,T)_{0\,0\,1\,k}=-2L_k.
\end{aligned}
\tag{1.103c$'$}
$$

实李代数 $sp(4)$ 生成元有以下厄米共轭运算,

$$
\begin{aligned}
&J_0^\dagger=J_0,\quad L_0^\dagger=L_0,\\
&J_{\pm 1}^\dagger=\mp J_{\mp 1},\quad L_{\pm 1}^\dagger=\mp L_{\mp 1},\\
&T_{p\,q}^\dagger=(-)^{p+q}T_{-p\,-q}.
\end{aligned}
\tag{1.104}
$$

其 Cartan 子代数的基为 $\{J_0,L_0\}$, 所以其不可约表示可以用最高权 $(\hat{j},l_0)$ 来标记. $\hat{j}$ 是 J_0 在表示空间最大的本征值, l_0 是 J_0 为 $\hat{j}$ 时, L_0 的本征值.

若单李代数的维数为 n, 秩为 r, 其不可约表示空间的基一般讲需要 $(n-r)/2$ 个量子数描写. 除 r 个权外, 还需要 $(n-3r)/2$ 个附加量子数. 所以 $sp(4)$ 的不可约表示空间态的完全描述, 需要两个附加量子数. 考虑到 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 是互相对易的, 所以可取 J^2, L^2 为附加量子数. 即取 J^2, J_0, L^2, L_0 的共同本征矢 $\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle$ 为不可约表示空间的基.

$$J^2\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle = j(j+1)\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle,$$

$$J_0\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle = k\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle,$$

$$L^2\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle = l(l+1)\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle,$$

$$L_0\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle = m\left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle.$$

在此基下, $J_{\pm1}, L_{\pm1}$ 的表示矩阵是已知的, 由 (1.97) 可得

$$\begin{aligned}
&\left\langle\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j'\; k'\; l'\; m' \end{matrix}\right| J_{\pm1} \left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle \\
&\quad = \mp\delta_{j'\,j}\delta_{k'\,k\pm1}\delta_{l'\,l}\delta_{m'\,m}\sqrt{(j\mp k)(j\pm k+1)/2}, \\
&\left\langle\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j'\; k'\; l'\; m' \end{matrix}\right| L_{\pm1} \left|\begin{matrix} \hat{j}\; l_0 \\ j\; k\; l\; m \end{matrix}\right\rangle \\
&\quad = \mp\delta_{j'\,j}\delta_{k'\,k}\delta_{l'\,l}\delta_{m'\,m\pm1}\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)/2}.
\end{aligned} \tag{1.105}$$

因此只要再求出 $T_{1/2\,p\,1/2\,q}$ 的表示矩阵, 就求出了表示. 利用 $T_{1/2\,p\,1/2\,q}$ 不可约张量性质, 定义约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j'\, k'\, l'\, m' \end{matrix} \middle| T_{1/2\,p\,1/2\,q} \middle| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, k\, l\, m \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \langle 1/2\; p\; j\; k | j'\; k' \rangle \langle 1/2\; q\; l\; m | l'\; m' \rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j'\, l' \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle . \tag{1.106}$$

由耦合张量定义和 CG 系数，$6-j$ 系数性质，可得耦合张量约化矩阵元公式

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j'\, l' \end{matrix} \middle\| (TT)_{\tilde{j}\,\tilde{l}} \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle$$
$$= (-)^{j+j'+l+l'} \sqrt{(2\tilde{j}+1)(2\tilde{l}+1)} \sum_{j''\, l''} \sqrt{(2j''+1)(2l''+1)}$$
$$\times \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & \tilde{j} \\ j & j' & j'' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & \tilde{l} \\ l & l' & l'' \end{matrix} \right\}$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j'\, l' \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j''\, l'' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j''\, l'' \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle . \tag{1.107}$$

用 $\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1\, j-1\, l\, l \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, j\, l\, l \end{matrix} \right\rangle$ 分别从左和右作用于 $(TT)_{1\;-1\;0\;0} = -2J_{-1}$, 用 $\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, j\, l-1\, l-1 \end{matrix} \right\|$ 和 $\left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, j\, l\, l \end{matrix} \right\rangle$ 分别从左和右作用于 $(TT)_{0\;0\;1\;-1} = -2L_{-1}$, 可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1\, l \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l+1/2 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l+1/2 \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{l}{l+1}} \left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1\, l \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l-1/2 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1/2\ l-1/2\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\tag{1.108}$$

$$\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l-1\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j+1/2\ l-1/2\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j+1/2\ l-1/2\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{j}{j+1}}\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l-1\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1/2\ l-1/2\end{matrix}\right\rangle$$
$$\times\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1/2\ l-1/2\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l\end{matrix}\right\rangle.$$

利用厄米共轭关系可得约化矩阵元的对称关系

$$\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j'\ l'\end{matrix}\right\rangle^*$$
$$=(-)^{j'-j+l'-l}\sqrt{\frac{(2j'+1)(2l'+1)}{(2j+1)(2l+1)}}\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j'\ l'\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l\end{matrix}\right\rangle. \tag{1.109}$$

由齐次方程作适当变数替换，利用对称关系，取相因子为实，可解出约化矩阵元满足的齐次关系

$$\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1\ l\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1/2\ l+1/2\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{4jl}{(2j-1)(2l+1)}}\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1/2\ l-1/2\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1\ l\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1/2\ l-1/2\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{4j(l+1)}{(2j-1)(2l+1)}}\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j-1/2\ l+1/2\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ l\end{matrix}\right\rangle. \tag{1.110}$$

用 $\left\langle\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ j\ l\ l\end{matrix}\right|$ 和 $\left|\begin{matrix}\hat{j}\ l_0\\ j\ j\ l\ l\end{matrix}\right\rangle$ 从左和右分别作用于 $(TT)_{1\,0\,0\,0}$

$= -2J_0$ 和 $(TT)_{0\,0\,1\,0} = -2L_0$，利用约化矩阵元对称关系，取相因子为实，可得约化矩阵元满足的非齐次方程

$$\begin{aligned}&(l+1)\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l+1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &\quad + l\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l-1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &= (l+1)\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l+1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &\quad + l\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l-1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 - (2j+1)(2l+1),\end{aligned} \tag{1.111a}$$

$$\begin{aligned}&(j+1)\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l+1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &\quad - (j+1)\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l-1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &= -j\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l+1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &\quad + j\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l-1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 - (2j+1)(2l+1),\end{aligned} \tag{1.111b}$$

由此和对称关系，可解出约化矩阵元平方满足的递推关系

$$\begin{aligned}&\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l+1/2 \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &= \frac{(j-l)(2j+1)}{4j(j+1)(l+1)}\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l+1/2 \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &\quad + \frac{(2j+1)^2}{4j(j+1)}\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \left\| T \right\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l-1/2 \end{matrix} \right\rangle^2 + \frac{(j-l)(2j+1)}{j},\end{aligned} \tag{1.112a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j-1/2\, l-1/2 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$= \frac{(2j+1)^2}{4j(j+1)} \left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l+1/2 \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$- \frac{(j+l+1)(2j+1)}{4j(j+1)l} \left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j+1/2\, l-1/2 \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$+ \frac{(j+l+l)(2j+1)}{j}. \tag{1.112b}$$

由最高权态出发，用递推关系 (1.112) 可以求出 T 约化矩阵元的平方. 如

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-1/2\, l_0+1/2 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}\, l_0 \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{(2\hat{j}-2l_0)(2\hat{j}+1)}{2\hat{j}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-1/2\, l_0-1/2 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}\, l_0 \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{(2\hat{j}+2l_0+2)(2\hat{j}+1)}{2\hat{j}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-1\, l_0+1 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-1/2\, l_0+1/2 \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{2(2\hat{j}-2l_0-1)2\hat{j}}{2\hat{j}-1},$$

$$\vdots$$

设 n 时约化矩阵元满足

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-n/2\, l_0+n/2 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-(n-1)/2\, l_0+(n-1)/2 \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$= \frac{n(2\hat{j}-2l_0-n+1)(2\hat{j}-n+2)}{2\hat{j}-n+1}, \tag{1.113a}$$

用递推关系 (1.112), 可证在 $n+1$ 时 (1.113a) 也成立. 同理可证下式成立,

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-n/2\, l_0-n/2 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ \hat{j}-(n-1)/2\, l_0-(n-1)/2 \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$= \frac{n(2\hat{j}+2l_0-n+3)(2\hat{j}-n+2)}{2\hat{j}-n+1}. \tag{1.113b}$$

利用约化矩阵元满足的齐次关系 (1.110) 和式 (1.113), 取相因子为正, 用数学归纳法可以证明, 约化矩阵元的值由下式给出,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\ l_0 \\ \hat{j}-\frac{n+1}{2}\ l_0+\frac{n+1}{2}-i \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\ l_0 \\ \hat{j}-\frac{n}{2}\ l_0+\frac{n}{2}-i \end{matrix} \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{(n-i+1)(2\hat{j}-2l_0-n+i)(2\hat{j}-n+i+1)(2l_0+n-i+2)}{(2\hat{j}-n)(2l_0+n-2i+2)}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\ l_0 \\ \hat{j}-\frac{n+1}{2}\ l_0-\frac{n+1}{2}+i \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\ l_0 \\ \hat{j}-\frac{n}{2}\ l_0-\frac{n}{2}+i \end{matrix} \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{(n-i+1)(2\hat{j}+2l_0-n+i+2)(2\hat{j}-n+i+1)(2l_0-n+i)}{(2\hat{j}-n)(2l_0-n+2i)}}.
\end{aligned} \tag{1.114}$$

式 (1.114) 给出 $sp(4)$ 不可约表示 $(\hat{j},l_0)$ 的全部约化矩阵元, 加上已知的 $so(3)$ CG 系数, 即求出全部 $T_{1/2\,p\,1/2\,q}$ 的表示矩阵.

由 (1.114) 还可以求出不可约表示 $(\hat{j},l_0)$ 包含的 (j,l) 值. 作以 $(\hat{j},l_0),(\hat{j}-l_0,0),(l_0,\hat{j}),(0,\hat{j}-l_0)$ 为顶点的四边形. 见图 1.8. 全部 (j,l) 值是四边形中包含的与 $(\hat{j},l_0)$ 差值为整数的点. 如不可约表示 $(1/2,0)$ 包含 $(j,l)=(1/2,0),(0,1/2)$, 不可约表示 $(1,0)$ 包含 $(1,0),(1/2,1/2),(0,1)$, 不可约表示 $(1,1/2)$ 包含 $(1,1/2),(1/2,1),(1/2,0),(0,1/2)$, 不可约表示 $(2,1/2)$ 包含 $(2,1/2),(3/2,1),(3/2,0),(1,3/2),(1,1/2),(1/2,2),(1/2,1),(0,3/2)$, 等等.

$sp(4)$ 两个不可约表示 $(\hat{j}_1,l_{10}),(\hat{j}_2,l_{20})$ 的直积, $(\hat{j}_1,l_{10})\otimes(\hat{j}_2,l_{20})\cong\oplus m_{\hat{j}\,l_0}(\hat{j},l_0)$, 其约化一般不是简单的. 所以 CG 系数一般有简并量子数 β 存在. 由 $sp(4)\supset so(3)_1\otimes so(3)_2$ 的完全可约性, CG 系数可分解为

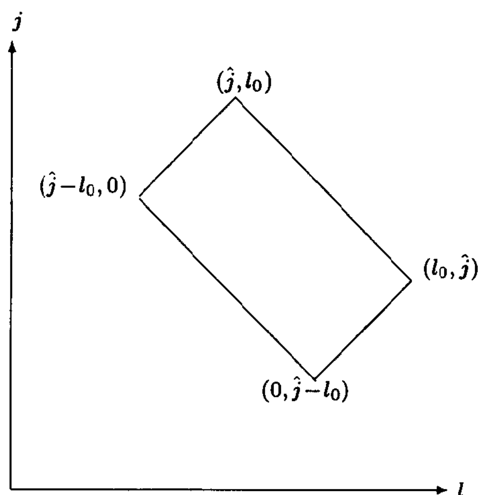


图 1.8 不可约表示 $(\hat{j}, l_0)$ 包含的 (j, l).

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1\, l_{10} & \hat{j}_2\, l_{20} \\ j_1\, k_1\, l_1\, m_1 & j_2\, k_2\, l_2\, m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \hat{j}\, l_0 \\ j\, k\, l\, m \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \langle j_1\, k_1\, j_2\, k_2 | j\, k \rangle \langle l_1\, m_1\, l_2\, m_2 | l\, m \rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1\, l_{10} & \hat{j}_2\, l_{20} \\ j_1\, l_1 & j_2\, l_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle . \tag{1.115}$$

$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1\, l_{10} & \hat{j}_2\, l_{20} \\ j_1\, l_1 & j_2\, l_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle$ 称为 $sp(4)$ 的约化标量因子.

用 $\left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1\, l_{10} & \hat{j}_2\, l_{20} \\ j_1\, k_1\, l_1\, m_1 & j_2\, k_2\, l_2\, m_2 \end{matrix} \right|$ 从左, $\left| \begin{matrix} \beta\, \hat{j}\, l_0 \\ j\, k\, l\, m \end{matrix} \right\rangle$ 从右作用于 $T_{1/2\; p\; 1/2\; q}$, 利用 CG 系数和 $6-j$ 系数进行计算, 可得约化标量因子的递推关系

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j''\, l'' \end{matrix} \middle\| T \middle\| \begin{matrix} \hat{j}\, l_0 \\ j\, l \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1\, l_{10} & \hat{j}_2\, l_{20} \\ j_1\, l_1 & j_2\, l_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \hat{j}\, l_0 \\ j''\, l'' \end{matrix} \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j_1' \, l_1'} (-)^{j_1'+j_2+j''+l_1'+l_2+l''+1} \sqrt{(2j_1+1)(2j+1)(2l_1+1)(2l+1)} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} 1/2 & j_1' & j_1 \\ j_2 & j'' & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_1' & l_1 \\ l_2 & l'' & l \end{Bmatrix} \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} \\ j_1 \, l_1 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} \\ j_1' \, l_1' \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} & \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_1' \, l_1' & j_2 \, l_2 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \beta \, \hat{j} \, l_0 \\ j \, l \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad + \sum_{j_2' \, l_2'} (-)^{j_1+j_2+j+l_1+l_2+l+1} \sqrt{(2j_2+1)(2j+1)(2l_2+1)(2l+1)} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} 1/2 & j_2' & j_2 \\ j_1 & j'' & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_2' & l_2 \\ l_1 & l'' & l \end{Bmatrix} \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_2 \, l_2 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_2' \, l_2' \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} & \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_1 \, l_1 & j_2' \, l_2' \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \beta \, \hat{j} \, l_0 \\ j \, l \end{matrix} \right\rangle .
\end{aligned}
\tag{1.116}
$$

取 $j'' = \hat{j} + 1/2, l'' = l_0 \pm 1/2, j = \hat{j}, l = l_0$, (1.116) 式左端为零，可得最高权态约化标量因子满足的齐次方程,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1' \, l_1'} (-)^{j_1'+j_2+\hat{j}+l_1'+l_2+l_0} \sqrt{(2j_1+1)(2\hat{j}+1)(2l_1+1)(2l_0+1)} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} 1/2 & j_1' & j_1 \\ j_2 & \hat{j}+1/2 & \hat{j} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_1' & l_1 \\ l_2 & l_0+1/2 & l_0 \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} \\ j_1 \, l_1 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} \\ j_1' \, l_1' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} & \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_1' \, l_1' & j_2 \, l_2 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \beta \, \hat{j} \, l_0 \\ \hat{j} \, l_0 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad + \sum_{j_2' \, l_2'} (-)^{j_1+j_2+\hat{j}+l_1+l_2+l_0+1} \sqrt{(2j_2+1)(2\hat{j}+1)(2l_2+1)(2l_0+1)} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} 1/2 & j_2' & j_2 \\ j_1 & \hat{j}+1/2 & \hat{j} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & l_2' & l_2 \\ l_1 & l_0+1/2 & l_0 \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_2 \, l_2 \end{matrix} \right\| T \left\| \begin{matrix} \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_2' \, l_2' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{j}_1 \, l_{10} & \hat{j}_2 \, l_{20} \\ j_1 \, l_1 & j_2' \, l_2' \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \beta \, \hat{j} \, l_0 \\ \hat{j} \, l_0 \end{matrix} \right\rangle = 0,
\end{aligned}
\tag{1.117a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j_1' l_1'}(-)^{j_1'+j_2+\hat{j}+l_1'+l_2+l_0+1}\sqrt{(2j_1+1)(2\hat{j}+1)(2l_1+1)(2l_0+1)}\\
&\quad\times\left\{\begin{matrix} 1/2 & j_1' & j_1 \\ j_2 & \hat{j}+1/2 & \hat{j}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1/2 & l_1' & l_1 \\ l_2 & l_0-1/2 & l_0\end{matrix}\right\}\\
&\quad\times\left\langle\begin{matrix}\hat{j}_1\, l_{10}\\ j_1\, l_1\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}_1\, l_{10}\\ j_1'\, l_1'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\hat{j}_1\, l_{10} & \hat{j}_2\, l_{20}\\ j_1'\, l_1' & j_2\, l_2\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\beta\,\hat{j}\, l_0\\ \hat{j}\, l_0\end{matrix}\right\rangle\\
&\quad+\sum_{j_2' l_2'}(-)^{j_1+j_2+\hat{j}+l_1+l_2+l_0+1}\sqrt{(2j_2+1)(2\hat{j}+1)(2l_2+1)(2l_0+1)}\\
&\quad\times\left\{\begin{matrix} 1/2 & j_2' & j_2 \\ j_1 & \hat{j}+1/2 & \hat{j}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 1/2 & l_2' & l_2 \\ l_1 & l_0-1/2 & l_0\end{matrix}\right\}\\
&\quad\times\left\langle\begin{matrix}\hat{j}_2\, l_{20}\\ j_2\, l_2\end{matrix}\right\|T\left\|\begin{matrix}\hat{j}_2\, l_{20}\\ j_2'\, l_2'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\hat{j}_1\, l_{10} & \hat{j}_2\, l_{20}\\ j_1\, l_1 & j_2'\, l_2'\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\beta\,\hat{j}\, l_0\\ \hat{j}\, l_0\end{matrix}\right\rangle=0.
\end{aligned}
\tag{1.117b}
$$

在简单约化时，由此可解出最高权态约化标量因子到差一常数，利用归一化条件可确定最高权态的约化标量因子. 在非简单约化时，式 (1.117) 可确定最高权态的约化标量因子到差 $m_{\hat{j}l_0}$ 个常数. 利用正交归一化条件后，仍有 $m_{\hat{j}l_0}-1$ 个任意常数不能确定. 文献 [10] 有部分 C_2 约化标量因子的解析表达式.

已知在 Chevalley 基中， C_2 Cartan 子代数为 $\{h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}\}$, 不可约表示标记为 $(\lambda\ \mu)$. 并且 $\lambda = 2\hat{j} - 2l_0$, $\mu = 2l_0$. 不可约表示 $(\lambda\ \mu) = (1\ 0)$ 就是 $\hat{j} = 1/2$, $l_0 = 0$. 用式 (1.114)(1.109) 可以算出 $\langle 0\ 1/2\|T\|1/2\ 0\rangle = \sqrt{2}$, $\langle 1/2\ 0\|T\|0\ 1/2\rangle = \sqrt{2}$. 取基顺序为 $|1/2\ 1/2\ 0\ 0\rangle$, $|0\ 0\ 1/2\ 1/2\rangle$, $|1/2\ -1/2\ 0\ 0\rangle$, $|0\ 0\ 1/2\ -1/2\rangle$, 代入 $so(3)$ 的 CG 系数和角动量矩阵元, 可看出不可约表示 $(\lambda\ \mu) = (1\ 0)$ 就是定义 $sp(4)$ 的表示.

下面给出不可约表示直积约化例子，在例中均用 $(\hat{j}, l_0)$ 标记不可约表示. 利用 $sp(4) \supset so(3)_1 \otimes so(3)_2$ 及图 1.8 给出的不可

约表示 $(\hat{j}, l_0)$ 包含的 (j,l) 值，和已知的 $so(3)_1 \otimes so(3)_2$ 约化，可以解决不可约表示直积约化问题．如 $(1,0)\otimes(1,1/2)$ 包含的 (j,l) 为 $(2,1/2)\oplus 2(3/2,1)\oplus 2(3/2,0)\oplus 2(1,3/2)\oplus 5(1,1/2)\oplus(1/2,2)\oplus 5(1/2,1)\oplus 4(1/2,0)\oplus 2(0,3/2)\oplus 4(0,1/2)$. 其中最高的权为 $(2,1/2)$, 从中减去不可约表示 $(2,1/2)$ 所包含的 (j,l) 值 $(2,1/2),(3/2,1),(3/2,0),(1,3/2),(1,1/2),(1/2,2),(1/2,1),(0,3/2)$, 剩余的最高权为 $(3/2,1)$, 从中减去不可约表示 $(3/2,1)$ 所包含的 (j,l) 值 $(3/2,1),(1,3/2),(1,1/2),(1/2,1),(1/2,0),(0,1/2)$, 剩余的最高权为 $(3/2,0)$, 从中减去不可约表示 $(3/2,0)$ 所包含的 (j,l) 值 $(3/2,0),(1,1/2),(1/2,1),(0,3/2)$, 剩余的最高权有两个，即 $2\,(1,1/2)$, 说明直积 $(1,0)\otimes(1,1/2)$ 包含不可约表示 $(1,1/2)$ 两次，从中减去两倍不可约表示 $(1,1/2)$ 包含的 (j,l) 值 $(1,1/2),(1/2,1),(1/2,0),(0,1/2)$, 剩余的 (j,l) 为 $(1/2,0),(0,1/2)$, 刚好是不可约表示 $(1/2,0)$ 所包含的．所以有

$$\begin{aligned}&(1,0)\otimes(1,1/2)\\&\quad=(2,1/2)\oplus(3/2,1)\oplus(3/2,0)\oplus 2(1,1/2)\oplus(1/2,0).\end{aligned}\tag{1.118}$$

作为非简单约化时求约化标量因子的例子，求 $(1,0)\otimes(1,1/2)$ 到两个 $(1,1/2)$ 的约化标量因子，取 $\beta=1,2$, 将最高权态约化标量因子简写为

$$\begin{aligned}x_{1\,\beta}&=\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,0)&(1\,1/2)&\beta\,(1\,1/2)\\1\,0&1\,1/2&1\,1/2\end{array}\right\rangle,\\x_{2\,\beta}&=\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,0)&(1\,1/2)&\beta\,(1\,1/2)\\1\,0&0\,1/2&1\,1/2\end{array}\right\rangle,\\x_{3\,\beta}&=\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,0)&(1\,1/2)&\beta\,(1\,1/2)\\1/2\,1/2&1/2\,1&1\,1/2\end{array}\right\rangle,\end{aligned}\tag{1.119}$$

$$x_{4\,\beta} = \left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & \beta\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1/2\,0 & 1\,1/2 \end{array} \right\rangle,$$

$$x_{5\,\beta} = \left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & \beta\,(1\,1/2) \\ 0\,1 & 1\,1/2 & 1\,1/2 \end{array} \right\rangle,$$

取不同的 j_1, l_1, j_2, l_2 值，如 $j_1 = 1$, $l_1 = 0$, $j_2 = 1/2$, $l_2 = 1$, 等等，用 (1.117) 可得齐次方程，

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}x_{1\,\beta} - \sqrt{30}x_{2\,\beta} - 4x_{3\,\beta} = 0, \\ &-\sqrt{3}x_{1\,\beta} + x_{3\,\beta} - \sqrt{15}x_{4\,\beta} - \sqrt{2}x_{5\,\beta} = 0, \\ &\sqrt{5}x_{1\,\beta} + 3\sqrt{2}x_{2\,\beta} + 4x_{4\,\beta} = 0, \\ &-x_{1\,\beta} + \sqrt{3}x_{3\,\beta} + \sqrt{5}x_{4\,\beta} + \sqrt{6}x_{5\,\beta} = 0. \end{aligned} \tag{1.120}$$

上方程组有两个根可任意变，正与 $(1,0)\otimes(1,1/2)$ 到 $(1,1/2)$ 约化重复度为 2 是一致的．如取 $x_{3\,\beta}, x_{1\,\beta}$ 为自变量，则可解出

$$\begin{aligned} x_{2\,\beta} &= \sqrt{1/10}x_{1\,\beta} - \sqrt{8/15}x_{3\,\beta}, \\ x_{4\,\beta} &= -\sqrt{4/5}x_{1\,\beta} + \sqrt{3/5}x_{3\,\beta}, \\ x_{5\,\beta} &= \sqrt{3/2}x_{1\,\beta} - \sqrt{2}x_{3\,\beta}. \end{aligned} \tag{1.121}$$

这种非简单约化情况，约化标量因子的确定有一定任意性．如可取 $x_{3\,1} = 0$, 加上归一化条件 $\sum_{i=1}^{5} x_{i\,\beta}^2 = 1$, 可解出 $x_{1\,1} = \sqrt{\frac{5}{17}}$, $x_{2\,1} = \sqrt{\frac{1}{34}}$, $x_{4\,1} = -\sqrt{\frac{4}{17}}$, $x_{5\,1} = \sqrt{\frac{15}{34}}$. 再由正交条件 $\sum_{i=1}^{5} x_{i\,1}x_{i\,2} = 0$ 和归一化条件可以解出 $x_{1\,2} = \sqrt{\frac{23\cdot23}{3\cdot5\cdot7\cdot17}}$, $x_{2\,2} = -\sqrt{\frac{3\cdot3\cdot3}{2\cdot7\cdot17}}$, $x_{3\,2} = \sqrt{\frac{17}{5\cdot7}}$, $x_{4\,2} = \sqrt{\frac{1}{3\cdot7\cdot17}}$, $x_{5\,2} = -\sqrt{\frac{11\cdot11}{2\cdot5\cdot7\cdot17}}$. 反复用递推关系 (1.116), 分别从 $x_{i\,\beta}$ 出发，可以计算出不同 β 的全部约化标量因子．其他非零约化标量因子结果如下．

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1\,0 & 1/2\,1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{3\cdot 5}{2\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1\,0 & 1/2\,1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{11\cdot 11}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1\,1/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1\,1/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{17}{5\cdot 7}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 0\,1/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2\cdot 2}{17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 0\,1/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3\cdot 7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 0\,1 & 1/2\,1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{5}{17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 0\,1 & 1/2\,1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{23\cdot 23}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 0\,1 & 1/2\,0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 0\,1 & 1/2\,0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1 \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1\,0 & 1/2\,0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,0 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2\cdot 5\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 1\,0 & 1/2\,0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,0 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{5\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1\,1/2 & 1/2\,0 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 3}{17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1\,1/2 & 1/2\,0 \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 0\,1/2 & 1/2\,0 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{4\cdot 4}{5\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 0\,1/2 & 1/2\,0 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{3\cdot 5}{7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 1\,(1\,1/2) \\ 0\,1 & 1/2\,1 & 1/2\,0 \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{3}{2\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 2\,(1\,1/2) \\ 0\,1 & 1/2\,1 & 1/2\,0 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{9\cdot 9}{2\cdot 7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 1\,(1\,1/2) \\ 1\,0 & 1\,1/2 & 0\,1/2 \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{3}{2\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 2\,(1\,1/2) \\ 1\,0 & 1\,1/2 & 0\,1/2 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{9\cdot 9}{2\cdot 7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1/2\,1 & 0\,1/2 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{2\cdot 2\cdot 3}{17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1/2\,1 & 0\,1/2 \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{1}{7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 1\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1/2\,0 & 0\,1/2 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{4\cdot 4}{5\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,0) & (1\,1/2) & 2\,(1\,1/2) \\ 1/2\,1/2 & 1/2\,0 & 0\,1/2 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{3\cdot 5}{7\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 0\,1 & 0\,1/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,(1\,1/2) \\ 0\,1/2 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2\cdot 5\cdot 17}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,0) & (1\,1/2) \\ 0\,1 & 0\,1/2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2\,(1\,1/2) \\ 0\,1/2 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{5\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 7\cdot 17}}.$$

上例中全部约化标量因子, 经正交归一条件核对无误. 当然如果不取 $x_{3\,1} = 0$, 会得到完全不同的结果. 当然这不同结果会是上结果的线性叠加.

在简单约化时, 约化标量因子的计算没有如上复杂. 从齐次方程 (1.117) 和归一条件即可确定最高权态的约化标量因子, 再利用递推关系 (1.116) 即可完全确定所有的约化标量因子. 在孙洪洲文章 [10] 有部分 C_2 约化标量因子的解析表达式.

参　考　文　献

[1] Barut A O, Raczka R. Theory of Group Representations and Applications. Warszawa: PNW-Polish Scientific Publishers, 1980

[2] Barut A O, Raczka R. On non-compact groups, I. Classification of non-compact real simple Lie groups and groups containing the Lorentz group. Proc Roy Soc, 1965,(A287): 519

[3] Biedenharn L C, Louck J D. Angular Momentum in Quantum Physics, Theory and Application. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1981

[4] Chen J Q. Group Represention Theory for Physicists. Singapore: World Scientific, 1989

[5] Edmonds A R. Angular Momentum in Quantum Mechanics. New Jersey: Princeton University Press, 1957

[6] 韩其智，孙洪洲. 群论. 北京：北京大学出版社，1987

[7] Jacobson N. Lie Algebras. New York: Interscience Publ., 1962

[8] 马中骐. 物理学中的群论. 北京：科学出版社，1998

[9] Naimark M A, Stern A I. Theory of Group Representations. New York: Springer-Verlag, 1982

[10] 孙洪洲. 秩为 2 的单纯紧致李群 $C(2)$. 高能物理与核物理，1980(4): 137

[11] Racah G. Group Theory and Spectroscopy. New Jersey: Notes from Princeton, 1951

[12] 万哲先. 李代数. 北京：科学出版社，1964

[13] Winger E P. Group Theory and Its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra. New York: Academic Press, 1959

(14) 杨国祯，孙洪洲，关洪等. $C(2)$ 群和基本粒子强相互作用. 北京大学学报，1964(10): 253

第二章　李代数$gl(n,R)$及$u(n)$的表示

本章讨论李代数 $gl(n,R), u(n)$ 和 $su(n)$ 的表示. 第一节简述 $gl(n,C)$ 表示的性质以及 $gl(n,R), u(n)$ 和 $su(n)$ 表示间关系. 第二节和第三节给出 $u(2)$ 和 $u(3)$ 的不可约表示和约化系数. 第四节给出 Gelfand 基下 $u(n)$ 的不可约表示和约化系数.

2.1　一般线性李代数表示的基本性质

一般线性李代数 $gl(n,C)$ 是复数域上非半单李代数, 其生成元为 $E_{i\,j}$, $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素为零的 $n\times n$ 维矩阵. 满足对易关系

$$[E_{i\,j}, E_{k\,l}] = \delta_{j\,k}E_{i\,l} - \delta_{i\,l}E_{k\,j}, \tag{2.1}$$

其中 $i,j,k,l = 1,\cdots,n$.

$gl(n,C)$ 有极大交换子代数 $\mathfrak{h}$. 取 $\mathfrak{h}$ 的基为 $\{E_{1\,1}, E_{2\,2}, \cdots, E_{nn}\}$. 设 $gl(n,C)$ 在空间 V 上的表示为 ρ, 与半单李代数一样, 利用 $\mathfrak{h}$ 是交换代数性质, 可以定义权, 也就是取 $E_{1\,1}, E_{2\,2}, \cdots, E_{n\,n}$ 的共同本征矢 v_λ 为表示空间的基, 满足

$$E_{i\,i}v_\lambda = m_i v_\lambda, \quad i = 1,\cdots,n,$$

则 $\lambda = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 称为表示 ρ 的一个权, v_λ 是相应的一个权向量.

从 $gl(n,C)$ 满足的对易关系可以看出, 生成元 $E_{i\,j}$, $i<j$, 对应正根, 它作用于权向量使权增加. $E_{j\,i}$, $i<j$, 对应负根, 它作用于权向量使权减少. 并且保持 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 不变. 可以证明:

(1) $gl(n,C)$ 的有限维表示恒有最高权和最低权.

(2) $gl(n,C)$ 的有限维不可约表示有唯一的最高权和唯一的最低权. 具有相同最高权的两个不可约表示是等价的.

(3) $gl(n,C)$ 的有限维不可约表示由非负整数 $m_1,m_2,\cdots,m_{n-1},s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}$ 和复数 p,q 描述, 而 $p-q$ 为整数.

(4) 当 $gl(n,C)$ 的有限维不可约表示满足 $s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=q=0$ 时, p 为整数, 称为 $gl(n,C)$ 的有限维解析不可约表示. 写 $m_{i\,n}=m_i$, $i=1,\cdots,n-1$, $m_{n\,n}=p$, 用 $\Gamma_n=(m_{1\,n},m_{2\,n},\cdots,m_{n\,n})$, 标记有限维解析不可约表示, Γ_n 是最高权, 且满足

$$m_{1\,n}\geq m_{2\,n}\geq\cdots\geq m_{n\,n}. \tag{2.2}$$

所以 $gl(n,C)$ 的有限维解析不可约表示可用最高权标记, 也常用相应的杨图标记. 还可证明 $gl(n,C)$ 的任一有限维解析表示可以分解为解析不可约表示的直和.

设 $\Gamma_n=(m_{1\,n},m_{2\,n},\cdots,m_{n\,n})$ 是 $gl(n,C)$ 的一个有限维解析不可约表示, 可证明 Γ_n 可以约化为其子群 $gl(n-1,C)$ 不可约表示 $\Gamma_{n-1}=(m_{1\,n-1},m_{2\,n-1},\cdots,m_{n-1\,n-1})$ 直和, Γ_n 包含满足下条件的 Γ_{n-1} 各一次,

$$m_{1\,n}\geq m_{1\,n-1}\geq m_{2\,n}\geq m_{2\,n-1}\geq\cdots\geq m_{n-1\,n-1}\geq m_{n\,n}. \tag{2.3}$$

实数域上一般线性李代数 $gl(n,R)$ 是实数域上的 $gl(n,C)$, 它们的有限维解析不可约表示间有一一对应关系. 因此 $gl(n,R)$ 的有限维解析不可约表示的最高权, 也用 n 个整数 $\Gamma_n=(m_{1\,n},m_{2\,n},\cdots,m_{n\,n})$ 描述, 也满足式 (2.2) 并可用杨图标记. 其任一有限维解析表示也是完全可约的. $gl(n,R)$ 的生成元也为 $E_{i\,j}$, 在厄米共轭运算下满足

$$E_{i\,j}^{\dagger}=E_{j\,i}. \tag{2.4}$$

酉代数 $u(n)$ 的生成元在物理中常取为 $n\times n$ 维厄米矩阵, 对

应到 $U(n)$ 群的指数映射含 i, 即

$$\begin{aligned} M_{i\,i} &= E_{i\,i}, \\ M_{i\,j} &= (E_{i\,j} + E_{j\,i}), \\ \tilde{M_{i\,j}} &= i(E_{i\,j} - E_{j\,i}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

虽然实李代数 $gl(n,R)$ 与 $u(n)$ 是不同构的. 但从式 (2.5) 可以看出, $gl(n,R)$ 任一满足 (2.4) 式的厄米表示, 可以诱导出 $u(n)$ 的一个厄米表示. 所以 $u(n)$ 的有限维不可约厄米表示也用最高权 $\Gamma_n = (m_{1\,n}, m_{2\,n}, \cdots, m_{n\,n})$ 描述, 最高权也满足式 (2.2).

$su(n)$ 是 $u(n)$ 取迹为零而得到的实单李代数. 例如可取其非对角生成元与 $u(n)$ 一样, 对角生成元为 $u(n)$ 的两个生成元相减

$$\begin{aligned} L_{i\,i} &= E_{i\,i} - E_{n\,n}, \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ L_{i\,j} &= (E_{i\,j} + E_{j\,i}), \\ \tilde{L_{i\,j}} &= i(E_{i\,j} - E_{j\,i}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

同样由 $u(n)$ 的表示可以诱导出 $su(n)$ 的表示. 而 $su(n)$ 的有限维不可约厄米表示的最高权用 $n-1$ 个整数 $(l_{1\,n}, l_{2\,n}, \cdots, l_{n-1\,n})$ 描述, $l_{i\,n} = m_{i\,n} - m_{n\,n}$, 满足

$$l_{1\,n} \geq l_{2\,n} \geq \cdots \geq l_{n-1\,n}.$$

本章以下给出 $gl(2,R), gl(3,R)$ 和 $gl(n,R)$ 的有限维解析不可约表示和约化系数, 利用 (2.5) 和 (2.6) 即可得相应 $u(n)$ 和 $su(n)$ 的有限维不可约厄米表示和约化系数.

2.2 $u(2)$ 的表示

$gl(1,R)$ 是一维可解李代数, 其生成元为 $E_{1\,1}$. 它只有一维不可约表示, 设表示空间的基为 $|m_{1\,1}\rangle$, 则有

$$E_{1\,1}|m_{1\,1}\rangle = m_{1\,1}|m_{1\,1}\rangle.$$

用最高权表示时可记为 $\Gamma_1 = m_{1\,1}$.

$gl(2,R)$ 除 $E_{1\,1}$ 外，还有生成元 $E_{2\,2}, E_{1\,2}, E_{2\,1}$. 设 $gl(2,R)$ 有限维解析不可约表示为 $\Gamma_2 = (m_{1\,2}, m_{2\,2})$, 已知从 $gl(2,R)$ 不可约表示到 $gl(1,R)$ 不可约表示约化时，Γ_2 包含满足 $m_{1\,2} \geq m_{1\,1} \geq m_{2\,2}$ 的 $\Gamma_1 = m_{1\,1}$ 各一次，所以 Γ_2 表示空间的正交归一基可以取为 $\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle$. 其最高权态为 $\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2} \end{matrix} \right\rangle$, 满足

$$
\begin{aligned}
E_{1\,1}\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2} \end{matrix} \right\rangle &= m_{1\,2}\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2} \end{matrix} \right\rangle, \\
E_{2\,2}\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2} \end{matrix} \right\rangle &= m_{2\,2}\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2} \end{matrix} \right\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

对表示空间任一态有

$$
E_{1\,1}\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle = m_{1\,1}\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.8a}
$$

由对易关系知 $E_{1\,2}$ 使 $E_{1\,1}$ 的本征值加 1, 使 $E_{2\,2}$ 的本征值减 1, $E_{2\,1}$ 使 $E_{1\,1}$ 的本征值减 1, 使 $E_{2\,2}$ 的本征值加 1. 显然 $E_{1\,1}$ 和 $E_{2\,2}$ 本征值之和恒为 $m_{1\,2} + m_{2\,2}$, 所以

$$
E_{2\,2}\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle = (m_{1\,2} + m_{2\,2} - m_{1\,1})\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.8b}
$$

利用厄米表示条件可得矩阵元对称性,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m'_{1\,1} \end{matrix} \right| E_{2\,1} \left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right| E_{1\,2} \left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m'_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle^{*},
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

从左和右用态 $\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} m_{1\,2} \ \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle$ 作用于对易关系 $[E_{1\,2}, E_{2\,1}] = E_{1\,1} - E_{2\,2}$, 取基矢相因子使矩阵元为非负实数，可

得矩阵元递推关系

$$\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \middle| E_{1\,2} \middle| \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1}-1 \end{matrix} \right\rangle^2$$
$$= \left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1}+1 \end{matrix} \middle| E_{1\,2} \middle| \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle^2 - m_{1\,2} - m_{2\,2} + 2m_{1\,1}. \tag{2.10}$$

从最高权态出发，由递推关系可得

$$\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2} \end{matrix} \middle| E_{1\,2} \middle| \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2}-1 \end{matrix} \right\rangle^2 = m_{1\,2} - m_{2\,2},$$

$$\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2}-1 \end{matrix} \middle| E_{1\,2} \middle| \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2}-2 \end{matrix} \right\rangle^2 = 2(m_{1\,2} - m_{2\,2} - 1),$$

设下式在 i 时成立，

$$\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2}-(i-1) \end{matrix} \middle| E_{1\,2} \middle| \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,2}-i \end{matrix} \right\rangle^2 = i(m_{1\,2} - m_{2\,2} - i + 1),$$

由递推关系可证 $i+1$ 时也成立，所以上式恒成立．可得表示矩阵如下：

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1}+1 \end{matrix} \middle| E_{1\,2} \middle| \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle \\ &= \sqrt{(m_{1\,2}-m_{1\,1})(m_{1\,1}-m_{2\,2}+1)}, \\ &\left\langle \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1}-1 \end{matrix} \middle| E_{2\,1} \middle| \begin{matrix} m_{1\,2} \ m_{2\,2} \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle \\ &= \sqrt{(m_{1\,1}-m_{2\,2})(m_{1\,2}-m_{1\,1}+1)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

下面讨论 $gl(2,R)$ 两个不可约表示直积的约化．

设 $\Gamma_2' = (m_{1\,2}', m_{2\,2}')$, $\Gamma_2'' = (m_{1\,2}'', m_{2\,2}'')$ 是 $gl(2,R)$ 的两个不可约表示，它们的直积约化为 $\Gamma_2' \otimes \Gamma_2'' = \oplus_{\Gamma_2} \Gamma_2$. 即它们的直积是简单约化的．其中 $\Gamma_2 = (m_{1\,2}, m_{2\,2})$. 设 $\Gamma_2', \Gamma_2'', \Gamma_2$ 表示空间的基分别

为 $\left|\begin{matrix}\Gamma_2' \\ m_{11}'\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix}m_{12}' \ m_{22}' \\ m_{11}'\end{matrix}\right\rangle$, $\left|\begin{matrix}\Gamma_2'' \\ m_{11}''\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix}m_{12}'' \ m_{22}'' \\ m_{11}''\end{matrix}\right\rangle$, 和

$\left|\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix}m_{12} \ m_{22} \\ m_{11}\end{matrix}\right\rangle$. 从 E_{11} 和 E_{22} 的左边乘以 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}\end{matrix}\right|$,

右边乘以 $\left|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}' & m_{11}''\end{matrix}\right\rangle$, 可得约化系数 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}' & m_{11}''\end{matrix}\right\rangle$

满足选择定则

$$\begin{aligned} &m_{11} = m_{11}' + m_{11}'', \\ &m_{12} + m_{22} = m_{12}' + m_{22}' + m_{12}'' + m_{22}''. \end{aligned} \tag{2.12}$$

从 E_{12} 和 E_{21} 的左，右分别乘以 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}\end{matrix}\right|$, $\left|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}' & m_{11}''\end{matrix}\right\rangle$, 并

代入矩阵元的值 (2.11), 可得约化系数的递推关系

$$\begin{aligned} &\sqrt{(m_{11}-m_{22})(m_{12}-m_{11}+1)}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}-1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}' & m_{11}''\end{matrix}\right\rangle \\ &\quad= \sqrt{(m_{12}'-m_{11}')(m_{11}'-m_{22}'+1)}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}'+1 & m_{11}''\end{matrix}\right\rangle \\ &\qquad+ \sqrt{(m_{12}''-m_{11}'')(m_{11}''-m_{22}''+1)}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}' & m_{11}''+1\end{matrix}\right\rangle, \end{aligned} \tag{2.13a}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{(m_{12}-m_{11})(m_{11}-m_{22}+1)}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}+1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}' & m_{11}''\end{matrix}\right\rangle \\ &\quad= \sqrt{(m_{11}'-m_{22}')(m_{12}'-m_{11}'+1)}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_2 \\ m_{11}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ m_{11}'-1 & m_{11}''\end{matrix}\right\rangle \end{aligned}$$

$$+\sqrt{(m''_{11}-m''_{22})(m''_{12}-m''_{11}+1)}\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ m_{11} & m'_{11} & m''_{11}-1\end{array}\right\rangle. \tag{2.13b}$$

对 Γ_2 的最高权态，$m_{1\,1}=m_{1\,2}$ 时，由 (2.13b) 可得

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ m_{12} & m'_{11}-1 & m''_{11}\end{array}\right\rangle\\ &=-\sqrt{\frac{(m''_{11}-m''_{22})(m''_{12}-m''_{11}+1)}{(m'_{11}-m'_{22})(m'_{12}-m'_{11}+1)}}\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ m_{12} & m'_{11} & m''_{11}-1\end{array}\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.14}$$

这是由 $m'_{1\,1}$ 递推到 $m'_{1\,1}-1$ 的递推公式，利用它可以把所有的 $m_{1\,1}=m_{1\,2}$ 约化系数都写成 $\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ m_{1\,2} & m'_{1\,2} & m_{1\,2}-m'_{1\,2}\end{array}\right\rangle$ 的倍数. 再利用约化系数的正交归一性

$$\begin{aligned}\sum_{m'_{1\,1},m''_{1\,1}}&\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ m_{1\,1} & m'_{1\,1} & m''_{1\,1}\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ \tilde{m}_{1\,1} & m'_{1\,1} & m''_{1\,1}\end{array}\right\rangle\\ &=\delta_{\tilde{m}_{1\,1}\,m_{1\,1}},\end{aligned} \tag{2.15}$$

即可确定约化系数 $\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ m_{1\,2} & m'_{1\,2} & m_{1\,2}-m'_{1\,2}\end{array}\right\rangle$ 绝对值平方. 若取相因子使约化系数为实，还需要人为规定正负号. 这种规定称为惯例，如与 $so(3)$ 的 Conden-Shortly 惯例一致，可规定

$$\left\langle\begin{array}{c|cc}\Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2\\ m_{1\,2} & m'_{1\,2} & m_{1\,2}-m'_{1\,2}\end{array}\right\rangle>0. \tag{2.16}$$

最高权态其他约化系数可通过 (2.14) 递推求得.

下面求 $m'_{1\,2}=1$ 的约化系数，取 $m'_{2\,2}=0, m'_{1\,1}=1$，由 (2.14) 得

$$
\left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 \\ m_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,0 & \Gamma''_2 \\ 0 & m''_{11} \end{matrix} \right\rangle
= -\sqrt{(m''_{11}-m''_{22})(m''_{12}-m''_{11}+1)} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 \\ m_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1\,0 & \Gamma''_2 \\ 1 & m''_{11}-1 \end{matrix} \right\rangle .
$$

考虑到选择定则 (2.12)，把 $m_{1\,2}, m_{2\,2}, m_{1\,1}$ 用 $m''_{1\,2}, m''_{2\,2}, m''_{1\,1}$ 表示，再利用正交归一性 (2.15) 和惯例 (2.16)，可得最高权态的约化系数，

$$
\left\langle \begin{matrix} m_{12}+1\ m_{22} \\ m_{12}+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 10 & m_{12}\ m_{22} \\ 1 & m_{12} \end{matrix} \right\rangle = 1,
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} m_{12}\ m_{22}+1 \\ m_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 10 & m_{12}\ m_{22} \\ 1 & m_{12}-1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{m_{12}-m_{22}+1}},
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} m_{12}\ m_{22}+1 \\ m_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 10 & m_{12}\ m_{22} \\ 0 & m_{12} \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{m_{12}-m_{22}}{m_{12}-m_{22}+1}}.
$$

应用数学归纳法，从递推关系 (2.13a) 可求出

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} m_{12}+1\ m_{22} \\ m_{11}+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 10 & m_{12}\ m_{22} \\ 1 & m_{11} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{m_{11}-m_{22}+1}{m_{12}-m_{22}+1}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} m_{12}+1\ m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 10 & m_{12}\ m_{22} \\ 0 & m_{11} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{m_{12}-m_{11}+1}{m_{12}-m_{22}+1}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} m_{12}\ m_{22}+1 \\ m_{11}+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 10 & m_{12}\ m_{22} \\ 1 & m_{11} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{m_{12}-m_{11}}{m_{12}-m_{22}+1}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} m_{12}\ m_{22}+1 \\ m_{11} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 10 & m_{12}\ m_{22} \\ 0 & m_{11} \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{m_{11}-m_{22}}{m_{12}-m_{22}+1}}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

已知 $so(3)$ 与 $su(2)$ 同构，生成元为 $L_0=(E_{1\,1}-E_{2\,2})/2$, $L_{+1}=-E_{1\,2}/\sqrt{2}$, $L_{-1}=E_{2\,1}/\sqrt{2}$，注意到 $j=(m_{1\,2}-m_{2\,2})/2$, $m=m_{1\,1}-$

$(m_{1\,2}+m_{2\,2})/2$, 则 $so(3)$ 的表示矩阵 $L_0|j\ m\rangle = m|j\ m\rangle$, $\langle j\ m\pm 1|L_{\pm 1}|j\ m\rangle = \mp\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}/2$ 与式 (2.8) 和 (2.11) 诱导出的结果一致. 考虑 $m'_{1\,2}=1, m'_{2\,2}=0, m'_{1\,1}=1$, 对应 $so(3)$ 的 $|1/2\ 1/2\rangle$ 态, 而 $m'_{1\,2}=1, m'_{2\,2}=0, m'_{1\,1}=0$, 这对应于 $so(3)$ 的 $|1/2\ \ -1/2\rangle$ 态. 由 (2.17) 诱导出的 $j_1=1/2$ 的 CG 系数与已知 $so(3)$ 的结果一致.

需要着重指出式 (2.16) 的 Conden-Shortly 惯例, 与我们后面 $u(3), u(n)$ 采用的惯例不一致. 记 $\Gamma_2(1)=(m_{12}+1\ m_{22})$, $\Gamma_2(2)=(m_{12}\ m_{22}+1)$, 后面将规定最低权态 $m_{1\,1}=m_{2\,2}$ 的约化系数

$$\left\langle \begin{array}{c|cc} \Gamma_2 & \Gamma'_2 & \Gamma''_2 \\ m_{2\,2} & m'_{2\,2} & m_{2\,2}-m'_{2\,2} \end{array} \right\rangle > 0. \tag{2.18}$$

这相当 $so(3)$ 中规定 $\langle j\ -j|j_1\ -j_1\ j_2\ -j+j_1\rangle > 0$. 因此若由后面公式算 $so(3)$ 的 CG 系数, 将与 Conden-Shortly 惯例差 $(-)^{j_1+j_2-j}$ 因子.

2.3 $u(3)$ 的表示

$gl(3,R)$ 包含 $gl(2,R)$, 所以其生成元除 $gl(2,R)$ 的生成元外, 还有生成元 $E_{3\,3}, E_{1\,3}, E_{2\,3}, E_{3\,1}, E_{3\,2}$. 设 $gl(3,R)$ 有限维解析不可约表示为 $\Gamma_3=(m_{1\,3}, m_{2\,3}, m_{3\,3})$, 用 $gl(3,R)\supset gl(2,R)\supset gl(1,R)$ 来标记 Γ_3 表示空间的态, 称为 Gelfand 基. 因为上述每步都是简单约化, 所以这标记是完全的. 用 Γ_2, Γ_1 标记 $gl(2,R), gl(1,R)$ 的不可约表示, 则 Γ_3 包含满足下式的 Γ_2, Γ_1 各一次.

$$\begin{aligned} &m_{1\,3}\geq m_{1\,2}\geq m_{2\,3}\geq m_{2\,2}\geq m_{3\,3}, \\ &m_{1\,2}\geq m_{1\,1}\geq m_{2\,2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

所以 Γ_3 表示空间的正交归一基可以取为

$$\left|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \Gamma_2\\ \Gamma_1\end{matrix}\right\rangle=\left|\begin{matrix}m_{1\,3}\;\;m_{2\,3}\;\;m_{3\,3}\\ m_{1\,2}\;\;m_{2\,2}\\ m_{1\,1}\end{matrix}\right\rangle.$$

记 $\hat{\Gamma}_2=(m_{1\,3},m_{2\,3})$, $\hat{\Gamma}_1=(m_{1\,2})$, 记 $\check{\Gamma}_2=(m_{2\,3},m_{3\,3})$, $\check{\Gamma}_1=(m_{2\,2})$, 对固定的 Γ_3, Γ_2 的最高值为 $\hat{\Gamma}_2$, Γ_2 的最低值为 $\check{\Gamma}_2$, 对固定的 Γ_2, Γ_1 的最高值为 $\hat{\Gamma}_1$, Γ_1 的最低值为 $\check{\Gamma}_2$. Γ_3 的最高权态和最低权态分别为 $\left|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \hat{\Gamma}_2\\ \hat{\Gamma}_1\end{matrix}\right\rangle$ 和 $\left|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \check{\Gamma}_2\\ \check{\Gamma}_1\end{matrix}\right\rangle$.

由上节讨论， $gl(2,R)$ 生成元的表示矩阵和约化系数是已知的，所以求 $gl(3,R)$ 的表示，只须求 $E_{3\,3},E_{1\,3},E_{2\,3},E_{3\,1},E_{3\,2}$ 的表示矩阵. 利用 $\sum_{p=1}^{3}E_{p\,p}$ 本征值之和恒为 $\sum_{p=1}^{3}m_{p\,3}$, 故有

$$E_{3\,3}\left|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \Gamma_2\\ \Gamma_1\end{matrix}\right\rangle=\left(\sum_{p=1}^{3}m_{p\,3}-\sum_{q=1}^{2}m_{q\,2}\right)\left|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \Gamma_2\\ \Gamma_1\end{matrix}\right\rangle. \tag{2.20}$$

这说明 $gl(3,R)$ 的 Gelfand 基，具有确定的权，即表示空间是按权分解的，而且解除了权空间的简并. 而 $E_{3\,1},E_{3\,2}$ 分别是 $E_{1\,3},E_{2\,3}$ 的厄米共轭，所以对厄米表示，只须求出 $E_{1\,3},E_{2\,3}$ 的表示矩阵即可.

由上节知在 $gl(2,R)$ 的 $(1\,0)$ 不可约表示中，其生成元 $E_{i\,j}$ 只有下列非零矩阵元,

$$\left\langle\begin{matrix}1\,0\\ 1\end{matrix}\right|E_{1\,1}\left|\begin{matrix}1\,0\\ 1\end{matrix}\right\rangle=1,\quad\left\langle\begin{matrix}1\,0\\ 0\end{matrix}\right|E_{2\,2}\left|\begin{matrix}1\,0\\ 0\end{matrix}\right\rangle=1,$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1\,0 \\ 1 \end{matrix} \middle| E_{1\,2} \middle| \begin{matrix} 1\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1, \quad \left\langle \begin{matrix} 1\,0 \\ 0 \end{matrix} \middle| E_{2\,1} \middle| \begin{matrix} 1\,0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = 1.$$

对 $i, j, k = 1, 2$ 有

$$[E_{i\,j}, E_{k\,3}] = \sum_{k'=0}^{1} \left\langle \begin{matrix} 1\,0 \\ k' \end{matrix} \middle| E_{i\,j} \middle| \begin{matrix} 1\,0 \\ k \end{matrix} \right\rangle E_{k'\,3}. \tag{2.21}$$

所以 $E_{1\,3}, E_{2\,3}$ 构成 $gl(2,R)$ 的 $(1\,0)$ 秩不可约张量，它们分别对应于 $\left| \begin{matrix} 1\,0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} 1\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$ 分量. 由 Wigner-Eckart 定理和已知的 $gl(2,R)$ 约化系数，求 $E_{1\,3}, E_{2\,3}$ 的表示矩阵元问题，就变成求它们的约化矩阵元问题. 定义约化矩阵元为

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2' \\ \Gamma_1' \end{matrix} \middle| E_{k'\,3} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} 1\,0 & m_{12}\,m_{22} \\ k' & m_{11} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} m_{12}'\,m_{22}' \\ m_{11}' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2' \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.22}$$

为简化符号，并与 $gl(n,R)$ 不可约表示的符号一致，设 $\Gamma_n = (m_{1n}, \cdots, m_{in}, \cdots, m_{nn})$, 记 $\Gamma_n(\pm i) = (m_{1n}, \cdots, m_{in} \pm 1, \cdots, m_{nn})$. 例如 $\Gamma_2(\pm 1) = (m_{1\,1} \pm 1, m_{2\,2})$, $\Gamma_2(1,2) = ((m_{1\,1}+1, m_{2\,2}+1)$, 等等.

利用对易关系 $[E_{2\,3}, E_{3\,2}] = E_{2\,2} - E_{3\,3}$, 和厄米共轭条件，从左和右分别作用 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \\ m_{22}+1 \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \\ m_{22}+1 \end{matrix} \right\rangle$, 并代入 $gl(2,R)$ 的 CG 系数，取态的相因子使约化矩阵元为非负实数，可得约化矩阵

元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1,2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1,2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \frac{\sqrt{(m_{12}-m_{22})(m_{12}-m_{22}+2)}}{m_{12}-m_{22}+1} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.23}$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1,2) \\ m_{22}+1 \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \\ m_{22} \end{matrix} \right\rangle$, 作用于对易关系 $[E_{1\,3}, E_{2\,3}] = 0$, 可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1,2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{(m_{12}-m_{22})}{(m_{12}-m_{22}+2)}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1,2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.24}$$

独立的齐次方程只有 (2.23)(2.24) 这两个，从它们可以解出

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1,2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{(m_{12}-m_{22})}{(m_{12}-m_{22}+1)}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.25a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1,2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{(m_{12}-m_{22}+2)}{(m_{12}-m_{22}+1)}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.25b}$$

下面再利用对易关系 $[E_{2\,3},E_{3\,2}]=E_{2\,2}-E_{3\,3}$, 和厄米共轭条件，从左和右分别作用 $\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\\ \Gamma_1\end{array}\right|$ 和 $\left|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\\ \Gamma_1\end{array}\right\rangle$, 可得约化矩阵元满足的非齐次方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{m_{12}-m_{11}}{m_{12}-m_{22}}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(-1)\end{array}\right\rangle^2 \\
&\quad+\frac{m_{11}-m_{22}+1}{m_{12}-m_{22}+2}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(-2)\end{array}\right\rangle^2 \\
&=\frac{m_{12}-m_{11}+1}{m_{12}-m_{22}+1}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(1)\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\rangle^2 \\
&\quad+\frac{m_{11}-m_{22}}{m_{12}-m_{22}+1}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(2)\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\rangle^2 \\
&\quad+2m_{12}+2m_{22}-m_{11}-m_{13}-m_{23}-m_{33}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

注意到约化矩阵元与 $m_{1\,1}$ 无关, 因此可以取 $m_{1\,1}$ 的不同值而得到不同的方程, 但其中只有两个方程是线性独立的. 为与 $gl(n,R)$ 的计算一致，从最低权开始递推，取 $m_{1\,1}=m_{2\,2}+1$ 和 $m_{1\,1}=m_{2\,2}$, 得到下列两个方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{m_{12}-m_{22}-1}{m_{12}-m_{22}}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(-1)\end{array}\right\rangle^2 \\
&\quad+\frac{2}{m_{12}-m_{22}+2}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(-2)\end{array}\right\rangle^2 \\
&=\frac{m_{12}-m_{22}}{m_{12}-m_{22}+1}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(1)\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\rangle^2 \\
&\quad+\frac{1}{m_{12}-m_{22}+1}\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2(2)\end{array}\right\|E_3\left\|\begin{array}{c}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{array}\right\rangle^2
\end{aligned}
$$

$$+2m_{12} + m_{22} - m_{13} - m_{23} - m_{33} - 1. \tag{2.27a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(-1) \end{matrix} \right\rangle^2 + \frac{1}{m_{12}-m_{22}+2} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(-2) \end{matrix} \right\rangle^2$$
$$= \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle^2 + 2m_{12} + m_{22} - m_{13} - m_{23} - m_{33}, \tag{2.27b}$$

从 (2.27) 可得递推关系

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle^2$$
$$= \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(-1) \end{matrix} \right\rangle^2 + \frac{1}{m_{12}-m_{22}+2} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(-2) \end{matrix} \right\rangle^2$$
$$+ \sum_p^3 m_{p3} - \sum_q^2 m_{q2} - m_{12}, \tag{2.28a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle^2$$
$$= \frac{1}{m_{22}-m_{12}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(-1) \end{matrix} \right\rangle^2 + \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(-2) \end{matrix} \right\rangle^2$$
$$+ \sum_p^3 m_{p3} - \sum_q^2 m_{q2} - m_{22} + 1. \tag{2.28b}$$

从最低权态出发，由递推关系 (2.28), 经数学归纳法计算，可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(1) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{(m_{13}-m_{12})(m_{12}-m_{23}+1)(m_{12}-m_{33}+2)}{m_{12}-m_{22}+2}}, \tag{2.29a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(2) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{(m_{23}-m_{22})(m_{13}-m_{22}+1)(m_{22}-m_{33}+1)}{m_{12}-m_{22}}}. \tag{2.29b}$$

为与 $gl(n,R)$ 不可约表示的符号一致，设 $\Gamma_k=(m_{1k},\cdots,m_{kk})$, 对 $m_{i\,k}$ 作变数替换，$x_{i\,k}=m_{i\,k}+k-i$. 如 $x_{1\,3}=m_{1\,3}+2, x_{2\,2}=m_{2\,2}$, 等等. 对 $i=1,2$, E_3 的全部约化矩阵元可表成

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(i) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{-\prod_{p=1}^{3}(x_{p\,3}-x_{i\,2}-1)}{\prod_{q\neq i}^{2}(x_{q\,2}-x_{i\,2}-1)}}. \tag{2.29c}$$

以下讨论 $gl(3,R)$ 不可约表示的直积约化.

设 $\Gamma_3'=(m_{1\,3}',m_{2\,3}',m_{3\,3}')$, $\Gamma_3''=(m_{1\,3}'',m_{2\,3}'',m_{3\,3}'')$ 是 $gl(3,R)$ 的两个不可约表示，它们的直积约化为 $\Gamma_3'\otimes\Gamma_3''\cong\oplus_{\Gamma_3}m_{\Gamma_3}\Gamma_3$. 注意此时一般不是简单约化的，$m_{\Gamma_3}$ 是不可约表示 Γ_3 的重复度.

取 $\Gamma_3',\Gamma_3'',\Gamma_3$ 表示空间的基分别为 $\left| \begin{matrix} \Gamma_3' \\ \Gamma_2' \\ \Gamma_1' \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} \Gamma_3'' \\ \Gamma_2'' \\ \Gamma_1'' \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{matrix} \right\rangle$, 取 $\beta=1,\cdots,m_{\Gamma_3}$, 是标记非简单约化的量子数，$gl(3,R)$ 的约化系数为

$$\left\langle \begin{matrix} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.30}$$

其中 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{matrix} \right\rangle$ 是 $gl(2,R)$ 的 CG 系数，它们是已知的,

所以求 $gl(3,R)$ 的 CG 系数问题就变化成为求 $gl(3,R)$ 的约化标量因子 $\left\langle \begin{array}{c} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \end{array} \right\rangle$ 的问题.

从 $E_{3\,3}$ 的左边乘以 $\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{array} \right|$ 右边乘以 $\left| \begin{array}{cc} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{array} \right\rangle$，可得约化标量因子满足的选择定则

$$\sum_{p=1}^{3} m_{p\,3} = \sum_{p=1}^{3} m'_{p\,3} + \sum_{p=1}^{3} m''_{p\,3}. \tag{2.31}$$

分别从 $E_{2\,3}$ 和 $E_{3\,2}$ 的左边乘 $\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{array} \right|$，右边乘 $\left| \begin{array}{cc} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{array} \right\rangle$，利用已知的 $gl(2,R)$ 约化系数和 E_3 约化矩阵元，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left\langle \begin{array}{cc} 1\,0 & \Gamma_2(-i) \\ 0 & \Gamma_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2(-i) \\ \Gamma_1 \end{array} \right\rangle \\
&\quad\times \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{array} \middle\| E_3 \middle\| \begin{array}{c} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(-i) \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2(-i) \end{array} \right\rangle \\
&= \sum_j \left\langle \begin{array}{cc} 1\,0 & \Gamma_2' \\ 0 & \Gamma_1' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2'(j) \\ \Gamma_1' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_2'(j) & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{array} \right\rangle \\
&\quad\times \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_3' \\ \Gamma_2'(j) \end{array} \middle\| E_3 \middle\| \begin{array}{c} \Gamma_3' \\ \Gamma_2' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2'(j) & \Gamma_2'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{array} \right\rangle \\
&\quad+ \sum_k \left\langle \begin{array}{cc} 1\,0 & \Gamma_2'' \\ 0 & \Gamma_1'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2''(k) \\ \Gamma_1'' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_2' & \Gamma_2''(k) \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{array} \right\rangle \\
&\quad\times \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_3'' \\ \Gamma_2''(k) \end{array} \middle\| E_3 \middle\| \begin{array}{c} \Gamma_3'' \\ \Gamma_2'' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2''(k) \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{array} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{2.32a}$$

$$\sum_i \left\langle \begin{matrix} 1\,0 & \Gamma_2 \\ 0 & \Gamma_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2(i) \\ \Gamma_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2' & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2(i) \\ \Gamma_1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(i) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2(i) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sum_j \left\langle \begin{matrix} 1\,0 & \Gamma_2'(-j) \\ 0 & \Gamma_1' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2' \\ \Gamma_1' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2'(-j) & \Gamma_2'' \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3' \\ \Gamma_2' \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3' \\ \Gamma_2'(-j) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2'(-j) & \Gamma_2'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$$

$$+ \sum_k \left\langle \begin{matrix} 1\,0 & \Gamma_2''(-k) \\ 0 & \Gamma_1'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2'' \\ \Gamma_1'' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2' & \Gamma_2''(-k) \\ \Gamma_1' & \Gamma_1'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \Gamma_1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3'' \\ \Gamma_2'' \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3'' \\ \Gamma_2''(-k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2''(-k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\,\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle . \tag{2.32b}$$

(2.32a) 是由 Γ_2 大递推到 Γ_2 小的递推公式. 而 (2.32b) 是由 Γ_2 小递推到 Γ_2 大的递推公式. 约化标量因子中量子数 β 标记递推关系 (2.32) 有 m_{Γ_3} 组线性无关解.

下面求 $\Gamma_3' = (1\,0\,0)$ 时的约化系数, 此时直积约化是简单的, β 量子数不出现. 以下将不可约表示 $(1\,0\,0)$ 和 $(1\,0)$, 简写为 1, 将不可约表示 $(0\,0\,0)$ 和 $(0\,0)$, 简写为 0. 取 $\Gamma_2' = (0\,0)$, $\Gamma_1' = (0)$, 即为恒等表示, 代入已知约化矩阵元的值, 从 (2.32) 可以得到递推关系

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 1 & \Gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(k) \\ \Gamma_2(i) \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{x_{k\,3} - x_{i\,2} - 1} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2(i) \end{matrix} \middle\| E_3 \middle\| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle \times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \Gamma_2(i) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(k) \\ \Gamma_2(i) \end{matrix} \right\rangle , \tag{2.33a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \Gamma_2(i) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(k) \\ \Gamma_2(i) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{x_{k\,3} - x_{i\,2} - 1}{x_{k\,3} - x_{i\,2}}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \Gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(k) \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.33b}$$

当 Γ_2 取最低值 $\check{\Gamma}_2 = (m_{2\,3}, m_{3\,3})$ 时，$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(k) \\ \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \right\rangle$ 只有 $\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(1) \\ \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \right\rangle$ 不为零. 利用约化标量因子的归一性

$$\sum_{\Gamma_2', \Gamma_2''} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3' & \Gamma_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle^2 = 1. \tag{2.34}$$

取相因子使 $\Gamma_2' = 0$ 约化系数为正，

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(1) \\ \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \right\rangle = 1, \tag{2.35a}$$

由式 (2.33a) 可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 1 & \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(2) \\ \check{\Gamma}_2(1) \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{x_{1\,3} - x_{2\,3} - 1} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \check{\Gamma}_2(1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(2) \\ \check{\Gamma}_2(1) \end{matrix} \right\rangle,$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 1 & \check{\Gamma}_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(3) \\ \check{\Gamma}_2(2) \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{x_{1\,3} - x_{3\,3} - 1} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \check{\Gamma}_2(2) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(3) \\ \check{\Gamma}_2(2) \end{matrix} \right\rangle,$$

再利用归一条件，注意 $\Gamma_2' = 0$ 的约化系数相因子为正，可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \check{\Gamma}_2(1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(2) \\ \check{\Gamma}_2(1) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{x_{1\,3} - x_{2\,3}}}, \tag{2.35b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \check{\Gamma}_2(2) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(3) \\ \check{\Gamma}_2(2) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{x_{1\,3} - x_{3\,3}}}. \tag{2.35c}$$

由 (2.35) 利用 (2.33b) 递推，用数学归纳法可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_3 \\ 0 & \Gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3(k) \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_q^2 (x_{k\,3} - x_{q\,2})}{\prod_{p\neq k}^3 (x_{k\,3} - x_{p\,3})}}. \tag{2.36}$$

利用已知约化矩阵元 (2.29), 式 (2.33a),(2.36) 给出全部 $gl(3,R)$ 的约化标量因子.

由 $gl(3,R)$ 的有限维不可约表示和约化标量因子，可以诱导出 $u(3)$ 和 $su(3)$ 的有限维不可约表示和约化标量因子.

2.4 $u(n)$ 的表示

设 $gl(n,R)$ 有限维解析不可约表示为 $\Gamma_n = (m_{1\,n},\cdots,m_{n\,n})$, 用 $gl(n,R) \supset gl(n-1,R) \supset \cdots \supset gl(1,R)$ 来标记 Γ_n 表示空间的态，因为上述每步都是简单约化，所以这标记是完全的. 取 $\Gamma_i = (m_{1\,i},\cdots,m_{i\,i})$, Γ_i 包含满足下式的 Γ_{i-1} 各一次.

$$m_{p\,i} \geq m_{p\,i-1} \geq m_{p+1\,i}, \tag{2.37}$$

其中 $p = 1,\cdots,i-1$, $i = 1,\cdots,n$. 所以 Γ_n 表示空间的正交归一基可以取为

$$\left| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \Gamma_{n-1} \\ \vdots \\ \Gamma_1 \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} m_{1\,n} \quad m_{2\,n} \quad \cdots \quad m_{n\,n} \\ m_{1\,n-1} \quad \cdots \quad m_{n-1\,n-1} \\ \vdots \\ m_{1\,1} \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle.$$

γ_n 是 Γ_n 分量指标 $\Gamma_{n-1},\cdots,\Gamma_1$ 的简写. 此基称为 Gelfand 基.

对固定的 Γ_i, Γ_{i-1} 的最高值为 $\hat{\Gamma}_{i-1}=(m_{1\,i},\cdots,m_{i-1\,i})$. Γ_{i-1} 的最低值为 $\check{\Gamma}_{i-1}=(m_{2\,i},\cdots,m_{i\,i})$. Γ_n 的最高权态和最低权态分别为 $\left|\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \hat{\Gamma}_{n-1}\\ \vdots\\ \hat{\Gamma}_1\end{array}\right\rangle=\left|\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \hat{\gamma}_n\end{array}\right\rangle$, 和 $\left|\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \check{\Gamma}_{n-1}\\ \vdots\\ \check{\Gamma}_1\end{array}\right\rangle=\left|\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \check{\gamma}_n\end{array}\right\rangle$. 并将不可约表示 $(1\,0\cdots0)$ 和 $(0\cdots0)$ 分别简写成 1 和 0 .

由前节讨论, $gl(2,R),gl(3,R)$ 生成元表示矩阵和约化系数是已知的. 本节将用数学归纳法, 去求 $gl(n,R)$ 的不可约表示 Γ_n 的表示矩阵和约化标量因子.

设对所有小于等于 n 的 $gl(n,R)$ 均满足以下结果. 取 $x_{p\,i}=m_{p\,i}+i-p$, 元素 $E_{p\,n}$ 的约化矩阵元可表成,

$$\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \Gamma_{n-1}(i)\end{array}\right\|E_n\left\|\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \Gamma_{n-1}\end{array}\right\rangle=\sqrt{\frac{-\prod_{p=1}^{n}(x_{p\,n}-x_{i\,n-1}-1)}{\prod_{q\neq i}^{n-1}(x_{q\,n-1}-x_{i\,n-1}-1)}}. \tag{2.38}$$

$gl(n,R)$ 的约化标量因子可以写为

$$\left\langle\begin{array}{cc}1&\Gamma_n\\0&\Gamma_{n-1}\end{array}\right|\left.\begin{array}{c}\Gamma_n(k)\\ \Gamma_{n-1}\end{array}\right\rangle=\sqrt{\frac{\prod_{q=1}^{n-1}(x_{k\,n}-x_{q\,n-1})}{\prod_{p\neq k}^{n}(x_{k\,n}-x_{p\,n})}}, \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\begin{array}{cc}1&\Gamma_n\\1&\Gamma_{n-1}\end{array}\right|\left.\begin{array}{c}\Gamma_n(k)\\ \Gamma_{n-1}(i)\end{array}\right\rangle&=\frac{1}{x_{k\,n}-x_{i\,n-1}-1}\\ &\times\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \Gamma_{n-1}(i)\end{array}\right\|E_n\left\|\begin{array}{c}\Gamma_n\\ \Gamma_{n-1}\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{cc}1&\Gamma_n\\0&\Gamma_{n-1}(i)\end{array}\right|\left.\begin{array}{c}\Gamma_n(k)\\ \Gamma_{n-1}(i)\end{array}\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.40}$$

下面将证明式 (2.38),(2.39) 和 (2.40) 在 n 变成 $n+1$ 时成立, 即它们也适用于 $gl(n+1,R)$.

$gl(n+1,R)$ 包含 $gl(n,R)$, 所以其生成元除 $gl(n,R)$ 的生成元外, 还有生成元 $00E_{n+1\,n+1},E_{1\,n+1},\cdots,E_{n\,n+1},E_{n+1\,1},\cdots,E_{n+1\,n}$.

由于 $gl(n,R)$ 的表示是已知的，所以只须求 $E_{n+1\,n+1}, E_{1\,n+1}, \cdots, E_{n\,n+1}, E_{n+1\,1}, \cdots, E_{n+1\,n}$ 的表示即可．利用 $\sum_{p=1}^{n+1} E_{p\,p}$ 本征值之和恒为 $\sum_{p=1}^{n+1} m_{p\,n+1}$，故有

$$E_{n+1\,n+1}\left|\begin{array}{l}\Gamma_{n+1}\\ \Gamma_n\\ \Gamma_n\end{array}\right\rangle=\left(\sum_{p=1}^{n+1} m_{p\,n+1}-\sum_{q=1}^{n} m_{q\,n}\right)\left|\begin{array}{l}\Gamma_{n+1}\\ \Gamma_n\\ \gamma_n\end{array}\right\rangle. \quad (2.41)$$

说明 $gl(n,R)$ 的 Gelfand 基有确定的权，即表示空间是按权分解的，并且解除了多重权的简并．而 $E_{n+1\,i}=E_{i\,n+1}^{\dagger}$. 所以对 $gl(n+1,R)$ 的厄米表示，只须求出 $E_{i\,n+1}$ 的表示矩阵即可，$i=1,\cdots,n$.

由式 (2.38),(2.39),(2.40) 知 $gl(n,R)$ 生成元 $E_{i\,j}$ 的表示矩阵是已知的．特别是 $\Gamma_n=(1)=(1,0,\cdots,0)$ 时，对 $i<j$, 当 k' 和 k 均为由 1 和 0 构成的 $n-1$ 维列矩阵，k' 有 $i-1$ 个 0, $\boldsymbol{k}$ 有 $j-1$ 个 0 时，有

$$\left\langle\begin{array}{c}1\\ k'\end{array}\right|E_{i\,j}\left|\begin{array}{c}1\\ k\end{array}\right\rangle=1.$$

其他 k,k' 的矩阵元为零．从对易关系

$$\begin{aligned}&[E_{i\,j},E_{k\,n+1}]\\ &\quad=\delta_{j\,k}E_{i\,n+1}=\sum_{k'}\delta_{j\,k}\delta_{i\,k'}E_{k'\,n+1}=\sum_{k'}\langle k'|\,E_{i\,j}\,|k\rangle\,E_{k'\,n+1},\end{aligned}$$

可以看出 $E_{1\,n+1},\cdots,E_{n-1\,n+1},E_{n\,n+1}$ 构成 $gl(n,R)$ 的 (1) 秩不可约张量．不可约表示 (1) 表示空间的基可用 1 和 0 构成的 n 维列向量表示．$E_{1\,n+1},\cdots,E_{n-1,n+1},E_{n\,n+1}$ 分别对应于 n 个 $1,\cdots,2$ 个 1, 1 个 1 的列向量分量．由 Wigner-Eckart 定理和已知的 $gl(n,R)$ 约化系数，求 $E_{i\,n+1}$ 的表示矩阵元问题，就变成求它们的约化矩阵元问题．定义约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma'_n \\ \gamma'_n \end{matrix} \middle| E_{i\,n+1} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n \\ i & \gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_n \\ \gamma'_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma'_n \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.42}$$

利用对易关系 $[E_{n\,n+1}, E_{n+1\,n}] = E_{n\,n} - E_{n+1\,n+1}$，从左和右分别作用 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1, j-1) \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(j) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1, j-1) \end{matrix} \right\rangle$，用 $gl(n, R)$ 的 CG 系数，如

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n \\ 0 & \check{\Gamma}_{n-1}(i-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n(i) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{x_{1\,n} - x_{i\,n}}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n \\ 0 & \check{\Gamma}_{n-1}(i-1, j-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n(i) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1, j-1) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{x_{i\,n} - x_{j\,n} - 1}{(x_{1\,n} - x_{i\,n})(x_{i\,n} - x_{j\,n})}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n \\ 1 & \check{\Gamma}_{n-1}(i-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n(i) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1, j-1) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{x_{i\,n} - x_{j\,n}} \sqrt{\frac{x_{1\,n} - x_{j\,n} - 1}{x_{1\,n} - x_{i\,n}}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n(i) \\ 1 & \check{\Gamma}_{n-1}(i-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n(i, j) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1, j-1) \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{x_{1\,n} - x_{j\,n} - 1}{x_{1\,n} - x_{j\,n}}},$$

等等. 取约化矩阵元相因子为实，可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{(x_{in}-x_{jn}+1)(x_{in}-x_{jn}-1)}}{x_{in}-x_{jn}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle . \tag{2.43}$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i,j) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1,j-1) \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1) \end{matrix} \right\rangle$，作用于对易关系 $[E_{n\,n+1}, E_{n-1\,n+1}] = 0$, 代入 $gl(n,R)$ 的 CG 系数，可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{(x_{in}-x_{jn}-1)}{(x_{in}-x_{jn}+1)}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle . \tag{2.44}$$

式 (2.43)(2.44) 包含所有独立的齐次方程. 取约化矩阵元相因子为正，对所有的 $i, j \leq n$, 可以解出

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{(x_{jn}-x_{in}-1)}{(x_{jn}-x_{in})}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\| E_{n+1} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle , \tag{2.45}$$

下面再利用对易关系 $[E_{n\,n+1}, E_{n+1\,n}] = E_{n\,n} - E_{n+1\,n+1}$，从

左和右分别作用 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle$, 利用厄米表示条件，可得约化矩阵元满足的非齐次方程

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n \\ 0 & \Gamma_{n-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n(i) \\ \Gamma_{n-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&= \sum_j \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n(-j) \\ 0 & \Gamma_{n-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \Gamma_{n-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(-j) \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&\quad + \sum_r^{n-1} x_{r\,n-1} + \sum_p^{n+1} x_{p\,n+1} - 2\sum_q^{n} x_{q\,n} - 1.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

注意到约化矩阵元只与 Γ_{n+1} 和 Γ_n 有关，因此可以取 Γ_{n-1} 的不同值而得到不同的方程，但其中只有 n 个方程是线性独立的. 从最低权开始递推，取 $\Gamma_{n-1} = \check{\Gamma}_{n-1}$ 和 $\Gamma_{n-1} = \check{\Gamma}_{n-1}(i-1)$, 对 $i = 1, \cdots, n$, 从 (2.46) 可以得到下列非齐次方程,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_{in} - x_{jn} + 1} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(-j) \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&\quad + \sum_p^{n+1} x_{p\,n+1} - \sum_q^{n} x_{q\,n} - x_{i\,n} - 1.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

式 (2.47) 可作为具体计算约化矩阵元的递推关系.

从最低权态出发，取 $\Gamma_n = \check{\Gamma}_n$, 注意此时有 $\check{x}_{q\,n} = x_{q+1\,n+1}$. 由递推关系 (2.47) 可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \check{\Gamma}_n(i) \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \check{\Gamma}_n \end{matrix} \right\rangle^2 = x_{1\,n+1} - x_{i+1\,n+1} - 1$$

$$= -\frac{\prod_{p=1}^{n+1}(x_{p\,n+1} - \check{x}_{i\,n} - 1)}{\prod_{q\neq i}^{n}(\check{x}_{q\,n} - \check{x}_{i\,n} - 1)}.$$

可见当 n 变为 $n+1$ 时，最低权态的约化矩阵元也满足式 (2.38). 用数学归纳法，设

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{-\prod_{p=1}^{n+1}(x_{p\,n+1} - x_{i\,n} - 1)}{\prod_{q\neq i}^{n}(x_{q\,n} - x_{i\,n} - 1)}}, \tag{2.48}$$

则由 (2.45) 递推一次，可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{x_{j\,n} - x_{i\,n} - 1}{x_{j\,n} - x_{i\,n}}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{-\prod_{p=1}^{n+1}(x_{p\,n+1} - x_{i\,n} - 1)}{(x_{j\,n} - x_{i\,n})\prod_{q\neq i,j}^{n}(x_{q\,n} - x_{i\,n} - 1)}},$$

仍满足式 (2.38). 所以对 $gl(n+1, R)$, 约化矩阵元公式 (2.38) 成立，因此式 (2.38) 恒成立.

我们也可以取

$$a_q = x_{q\,n} - x_{i\,n}, \qquad a_q - a_j = x_{q\,n} - x_{j\,n},$$
$$A_p = x_{p\,n+1} - x_{i\,n}, \quad A_p - a_j = x_{p\,n+1} - x_{j\,n}.$$

将式 (2.48) 和

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(-j) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{-\prod_{p=1}^{n+1}(x_{p\,n+1} - x_{j\,n})}{\prod_{q\neq j}^{n}(x_{q\,n} - x_{j\,n})}},$$

直接代入 (2.47) 式，来证明两端相等. 在证明中用到恒等式

$$\frac{\prod_{p=1}^{n+1}(A_p - b_i)}{\prod_{q=1}^{n}(a_q - b_i)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{p=1}^{n+1}(A_p - a_j)}{(a_j - b_i)\prod_{q\neq j}^{n}(a_q - a_j)} + \sum_{p=1}^{n+1} A_p - \sum_{q=1}^{n} a_q - b_i. \tag{2.49}$$

恒等式 (2.49) 的证明需要用到以下恒等式:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\prod_{q}^{n}(a_q - b)} = \sum_{j}^{n} \frac{1}{(a_j - b)\prod_{q\neq j}^{n}(a_q - a_j)}, \\ &\prod_{j}^{n} \frac{a_j^{m-2}}{\prod_{q\neq j}^{n}(a_q - a_j)} = 0, \ m = 2, \cdots, n, \\ &\prod_{j}^{n} \frac{a_j^{n-1}}{\prod_{q\neq j}^{n}(a_q - a_j)} = (-)^{n+1}, \\ &\prod_{j}^{n} \frac{a_j^{n}}{\prod_{q\neq j}^{n}(a_q - a_j)} = (-)^{n+1}\sum_{q}^{n} a_q. \end{aligned} \tag{2.50}$$

将式 (2.49) 左右端分别展开，利用式 (2.50), 比较 $\prod_{p=1}^{n+1} A_p$, $\sum_{k}^{n+1}\prod_{p\neq k}^{n+1} A_p$, $\sum_{k,k'}\prod_{p\neq k,k'}^{n+1} A_p$, $\cdots$, $\sum_{p}^{n+1} A_p$, 和常数项系数，可以证明左右端相等.

以下讨论 $gl(n+1,R)$ 不可约表示的直积约化. 设 $\Gamma'_{n+1} = (m'_{1\ n+1}, m'_{2\ n+1}, \cdots, m'_{n+1\ n+1})$, $\Gamma''_{n+1} = (m''_{1\ n+1}, m''_{2\ n+1}, \cdots, m''_{n+1\ n+1})$, 是 $gl(n+1,R)$ 的两个不可约表示，它们的直积约化为 $\Gamma'_{n+1}\otimes\Gamma''_{n+1} \cong \oplus_{\Gamma_{n+1}} m_{\Gamma_{n+1}}\Gamma_{n+1}$. 注意此时一般不是简单约化的，$m_{\Gamma_{n+1}}$ 是不可约表示 Γ_{n+1} 的重复度. 取 $\Gamma'_{n+1}, \Gamma''_{n+1}, \Gamma_{n+1}$ 表示空间的基分别为 $\left|\begin{array}{c}\Gamma'_{n+1}\\ \Gamma'_{n}\\ \vdots\\ \Gamma'_{1}\end{array}\right\rangle$, $\left|\begin{array}{c}\Gamma''_{n+1}\\ \Gamma''_{n}\\ \vdots\\ \Gamma''_{1}\end{array}\right\rangle$, $\left|\begin{array}{c}\Gamma_{n+1}\\ \Gamma_{n}\\ \vdots\\ \Gamma_{1}\end{array}\right\rangle$, $gl(n+1,R)$ 的 CG 系数为

$$
\left\langle \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \left\langle \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_n & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.51}
$$

其中 $gl(n,R)$ 的 CG 系数 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_n & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \right\rangle$ 是已知的. 所以求 $gl(n+1,R)$ 的 CG 系数问题就变成求 $gl(n+1,R)$ 的约化标量因子 $\left\langle \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n \end{matrix} \right\rangle$ 的问题. 量子数 β 标记非简单约化, $\beta = 1, \cdots, m_{\Gamma_{n+1}}$.

分别以 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \right\rangle$, 从左和右乘 $E_{i\,i}$, 可得约化标量因子满足的选择定则

$$
\sum_{p=1}^{i} m_{p\,i} = \sum_{p=1}^{i} m'_{p\,i} + \sum_{p=1}^{i} m''_{p\,i}, \quad i = 1, \cdots, n+1. \tag{2.52}
$$

分别以 $\left\langle \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \right\rangle$, 乘 $E_{n\,n+1}$ 和 $E_{n+1\,n}$, 并利用厄米表示条件, 注意约化矩阵元为实, 可得 $gl(n+1,R)$ 约化标量因子满足的方程

$$
\sum_i \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \middle| E_{n\,n+1} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(-i) \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_n & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n(-i) \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\ \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(-i) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \sum_j \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} \\ \Gamma'_n(j) \\ \gamma'_n \end{matrix} \middle| E_{n\,n+1} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} \\ \Gamma'_n \\ \gamma'_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_n(j) & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n(j) & \Gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\ \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
+ \sum_k \left\langle \begin{matrix} \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma''_n(k) \\ \gamma''_n \end{matrix} \middle| E_{n\,n+1} \middle| \begin{matrix} \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma''_n \\ \gamma''_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_n & \Gamma''_n(k) \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n(k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\ \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.53a}
$$

$$
\sum_i \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \\ \gamma_n \end{matrix} \middle| E_{n\,n+1} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_n & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n(i) \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\ \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \sum_j \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} \\ \Gamma'_n \\ \gamma'_n \end{matrix} \middle| E_{n\,n+1} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} \\ \Gamma'_n(-j) \\ \gamma'_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_n(-j) & \Gamma''_n \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n(-j) & \Gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
+ \sum_k \left\langle \begin{matrix} \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma''_n \\ \gamma''_n \end{matrix} \middle| E_{n\,n+1} \middle| \begin{matrix} \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma''_n(-k) \\ \gamma''_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_n & \Gamma''_n(-k) \\ \gamma'_n & \gamma''_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{n+1} & \Gamma''_{n+1} \\ \Gamma'_n & \Gamma''_n(-k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.53b}
$$

(2.53a) 是由 Γ_n 大递推到 Γ_n 小的递推公式. 而 (2.53b) 是由 Γ_n 小递推到 Γ_n 大的递推公式.

以下求 $\Gamma'_{n+1} = (1) = (1\ 0\ \cdots\ 0)$ 的约化标量因子. 此时直积约化是简单的, β 量子数不出现. 取 $\Gamma'_n = (0\ \cdots\ 0) = 0$, 代入已知 $gl(n,R)$ CG 系数和 $gl(n+1,R)$ 约化矩阵元的值, 可得递推关系如下

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 1 & \Gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \frac{1}{x_{k\,n+1} - x_{i\,n} - 1} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E_{n+1} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{n+1} \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 0 & \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle, \tag{2.54a}
$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 0 & \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{x_{k\,n+1} - x_{i\,n} - 1}{x_{k\,n+1} - x_{i\,n}}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 0 & \Gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.54b}$$

对最低权态，利用约化标量因子的归一性

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 1 & \check{\Gamma}_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \check{\Gamma}_n(k-1) \end{matrix} \right\rangle^2 + \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 0 & \check{\Gamma}_n(k-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \check{\Gamma}_n(k-1) \end{matrix} \right\rangle^2 = 1. \tag{2.55}$$

规定 $\Gamma'_n = 0$ 的约化系数相因子为正，由式 (2.54),(2.55) 可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 0 & \check{\Gamma}_n(k-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \check{\Gamma}_n(k-1) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{x_{1\,n+1} - x_{k\,n+1}}}. \tag{2.56}$$

利用递推关系 (2.54b) 和数学归纳法可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{n+1} \\ 0 & \Gamma_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{n+1}(k) \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_q^n (x_{k\,n+1} - x_{q\,n})}{\prod_{p\neq k}^{n+1} (x_{k\,n+1} - x_{p\,n+1})}}. \tag{2.57}$$

式 (2.57) 和 (2.54a) 说明，对 $gl(n+1,R)$，即 n 变为 $n+1$ 时，约化标量因子公式 (2.39),(2.40) 仍成立. 所以约化标量因子公式恒成立.

以上用数学归纳法求出了 $gl(n,R)$ 的不可约表示和约化系数，由此可以诱导出 $u(n)$ 的不可约厄米表示. 由于 $sl(n,R)$ 元素阵迹为零，用同样方法，只须将上述 $gl(n,R)$ 的 Cartan 子代数基改为迹为零的基，如

$$H_i = \{(n-1)E_{i\,i} - \sum_{j\neq i}^{n} E_{j\,j}\}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$H_1 + \cdots + H_n = 0,$$

或

$$h_{\alpha_i} = E_{i\,i} - E_{i+1\,i+1}, \quad i = 1, \cdots, n-1,$$

等等，就可求出 $sl(n,R)$ 的不可约表示．其对角元素表示矩阵与 $gl(n,R)$ 诱导出的结果一致，其非对角元素 $E_{i\,j}$ 的约化矩阵元与 $gl(n,R)$ 相同．其约化标量因子也与 $gl(n,R)$ 结果相同．

从 $gl(n,R)$ 和 $sl(n,R)$ 都可以诱导出 $su(n)$ 的不可约表示，并且得到相同的结果．

实李代数 $gl(n,R)$ 上述有限维解析不可约表示的复扩充，是复李代数 $gl(n,C)$ 的有限维不可约表示，但不是厄米表示和解析表示．

参 考 文 献

[1] Barut A O. Theory of Group Representations and Applications. Warszawa: PNW-Polish Scientific Publishers, 1980

[2] Chen J Q. Group Representation Theory for Physicists. Singapore: World Scientific, 1989

[3] Edmonds A R. Angular Momentum in Quantum Mechanics. New Jersey: Princeton University Press, 1957

[4] Gel'fand I M, Minlos R A, Shapiro Z Y. Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications. Translated by Cummins T, Boddington T. New York: Pergamon Press, 1963

[5] Holman W J, Biedenharn L C. The Representations and Tensor Opertors of the Unitary Groups $U(n)$. In Group Theory and Its Applications (2). Loebl E M. New York and London: Academic Press, 1971

[6] Naimark M A, Stern A I. Theory of Group Representations. New York: Springer-Verlag, 1982

[7] 孙洪洲，韩其智． $SU(3)$ 群不可约表示直积约化．物理学报 1965(2): 56

[8] 孙洪洲．秩为 2 的单纯紧致李群 $C(2)$．高能物理与核物理，1980(4): 73

[9] Sun H Z, Han Q Z. Irreducible representations of the Lie Algebra $su(n)$ and the graded Lie algebra $su(n/1)$. Scien. Sinica 1981(24): 914

第三章　李代数$o(n,R)$ 的表示

本章讨论李代数 $o(n,R)$ 的表示. 第一节简述李代数 $o(n,C)$ 和 $o(n,R)$ 表示的性质. 第二节给出 $o(4,R)$ 的不可约表示和约化系数. 第三节给出 $o(5,R)$ 不可约表示和约化系数. 第四节给出 Gelfand 基下, $o(2p,R)$ 的不可约表示和约化系数. 第五节给出 Gefand 基下, $o(2p+1,R)$ 的不可约表示和约化系数.

3.1　李代数 $o(n,R)$ 表示的基本性质

从第一章知道, n 维正交李代数

$$o(n,C)=\{x\in gl(n,C)|x^{\rm t}H+Hx=0,\ \ H^{\rm t}=H\}$$

当 $n=2p+1$ 时为 B_p, 当 $n=2p$ 时为 D_p, 所以 $o(n,C)$ 是单李代数.

若取 n 维对称矩阵 H 为单位矩阵, 则 $o(n,C)$ 元素为 n 维反对称矩阵, 即 $x^{\rm t}=-x$. 设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素为零的 $n\times n$ 维复矩阵, 则 $o(n,C)$ 的 $n(n-1)/2$ 个生成元可以取为

$$I_{j\,k}=E_{j\,k}-E_{k\,j}.$$

对 $j,k=1,\cdots,p$, $j>k$, $B_p=o(2p+1,C)$ 的 Cartan-Weyl 基为

$$\begin{aligned}
&H_j={\rm i}I_{2j\;2j-1},\\
&E_{(e_j\pm e_k)}=[{\rm i}(I_{2k-1\;2j-1}\mp I_{2k\;2j})-(I_{2k-1\;2j}\pm I_{2k\;2j-1})]/2,\\
&E_{-(e_j\pm e_k)}=[{\rm i}(I_{2k-1\;2j-1}\mp I_{2k\;2j})+(I_{2k-1\;2j}\pm I_{2k\;2j-1})]/2,\\
&E_{\pm e_j}=\sqrt{1/2}[{\rm i}I_{2p+1\;2j}\pm I_{2p+1\;2j-1}].
\end{aligned}\qquad(3.1)$$

$D_p = o(2p, C)$ 的 Cartan-Weyl 基为

$$
\begin{aligned}
&H_j = \mathrm{i}I_{2j\ 2j-1}, \\
&E_{(e_j \pm e_k)} = [\mathrm{i}(I_{2k-1\ 2j-1} \mp I_{2k\ 2j}) - (I_{2k-1\ 2j} \pm I_{2k\ 2j-1})]/2, \\
&E_{-(e_j \pm e_k)} = [\mathrm{i}(I_{2k-1\ 2j-1} \mp I_{2k\ 2j}) + (I_{2k-1\ 2j} \pm I_{2k\ 2j-1})]/2.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

由 (1.53) 知 $o(2p+1, C)$ 的紧致实形 $o(2p+1, R)$ 的生成元为

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_j &= -I_{2j\ 2j-1}, \\
U_{(e_j \pm e_k)} &= -I_{2k-1\ 2j-1} \pm I_{2k\ 2j}, \\
V_{(e_j \pm e_k)} &= -I_{2k-1\ 2j} \mp I_{2k\ 2j-1}, \\
U_{e_j} &= -\sqrt{2} I_{2p+1\ 2j}, \\
V_{e_j} &= \sqrt{2} I_{2p+1\ 2j-1}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

$o(2p, C)$ 的紧致实型 $o(2p, R)$ 的生成元为

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_j &= -I_{2j\ 2j-1}, \\
U_{(e_j \pm e_k)} &= -I_{2k-1\ 2j-1} \pm I_{2k\ 2j}, \\
V_{(e_j \pm e_k)} &= -I_{2k-1\ 2j} \mp I_{2k\ 2j-1}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

即实数域上的 $I_{j\ k}$, $j > k$, $j = 1, \cdots, n$ 构成 $o(n, R)$ 的生成元. 满足对易关系

$$
[I_{j\ k}, I_{l\ m}] = \delta_{j\ m} I_{k\ l} + \delta_{k\ l} I_{j\ m} - \delta_{j\ l} I_{k\ m} - \delta_{k\ m} I_{j\ l}, \tag{3.5}
$$

$I_{j\ k}$ 是反厄米的，即

$$
I^{\dagger}_{j\ k} = -I_{j\ k}. \tag{3.6}
$$

如与物理上惯用厄米算符一致， $o(n, R)$ 的基可取为

$$
\begin{aligned}
J_{j\ k} &= \mathrm{i}I_{j\ k}, \\
J^{\dagger}_{j\ k} &= J_{j\ k}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

在 Cartan-Weyl 基下，取 $o(2p,R)$ 和 $o(2p+1,R)$ 的 Cartan 子代数基均为 $H_j = \mathrm{i}I_{2j\,2j-1}$，$j=1,\cdots,p$. 与 $o(n,C)$ 一样，$o(2p,R)$ 和 $o(2p+1,R)$ 的不可约表示可以用此 Cartan 子代数对应的最高权来标记. 记 $o(2p,R)$ 的最高权为 $\Gamma_{2p}=(m_{1\,2p},\cdots,m_{p\,2p})$. 记 $o(2p+1,R)$ 的最高权为 $\Gamma_{2p+1}=(m_{1\,2p+1},\cdots,m_{p\,2p+1})$. 根据节 1.4 讨论，知

$$m_{1\,2p} \geq \cdots \geq m_{p-1\,2p} \geq |m_{p\,2p}| \geq 0, \tag{3.8}$$

$$m_{1\,2p+1} \geq \cdots \geq m_{p-1\,2p+1} \geq m_{p\,2p+1} \geq 0, \tag{3.9}$$

且 $m_{j\,2p}$, 和 $m_{j\,2p+1}$ 均为整数或均为半整数.

设 $\Gamma_{2p+1}=(m_{1\,2p+1},m_{2\,2p+1},\cdots,m_{p\,2p+1})$ 是 $o(2p+1,R)$ 的不可约表示，则 Γ_{2p+1} 可以约化为其子群 $o(2p,R)$ 不可约表示 $\Gamma_{2p}=(m_{1\,2p},m_{2\,2p},\cdots,m_{p\,2p})$ 的直和，Γ_{2p+1} 包含满足下条件的 Γ_{2p} 各一次，

$$\begin{aligned} m_{1\,2p+1} &\geq m_{1\,2p} \geq m_{2\,2p+1} \geq m_{2\,2p} \geq \cdots \\ &\geq m_{p\,2p+1} \geq m_{p\,2p} \geq -m_{p\,2p+1}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

设 $\Gamma_{2p}=(m_{1\,2p},m_{2\,2p},\cdots,m_{p\,2p})$ 是 $o(2p,R)$ 的不可约表示，则 Γ_{2p} 可以约化为其子群 $o(2p-1,R)$ 不可约表示 $\Gamma_{2p-1}=(m_{1\,2p-1}, m_{2\,2p-1},\cdots,m_{p-1\,2p-1})$ 的直和，Γ_{2p} 包含满足下条件的 Γ_{2p-1} 各一次，

$$\begin{aligned} m_{1\,2p} &\geq m_{1\,2p-1} \geq m_{2\,2p} \geq m_{2\,2p-1} \geq \cdots \\ &\geq m_{p-1\,2p} \geq m_{p-1\,2p-1} \geq |m_{p\,2p}|. \end{aligned} \tag{3.11}$$

由节 1.4 给出的 Chevalley 基下不可约表示的维数和 Chevalley 基与 Cartan-Weyl 基间变换关系，可得 $o(2p+1,R)$ 不可约表示 $\Gamma_{2p+1}=(m_{1\,2p+1},m_{2\,2p+1},\cdots,m_{p\,2p+1})$ 的维数为

$$\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1}) = \mathrm{d}(A_p)\prod_{j,i}\left(1+\frac{m_{i\,2p+1}+m_{j\,2p+1}}{2p+1-i-j}\right), \tag{3.12}$$

其中

$$\mathrm{d}(A_p)=\prod_{k=1}^{p}(1+\frac{m_{k\ 2p+1}+m_{p\ 2p+1}}{p+1-k})\prod_{j,i}(1+\frac{m_{i\ 2p+1}-m_{j+1\ 2p+1}}{j+1-i}),$$

$j=1,\cdots,p-1$, $i=1,\cdots,j$, $o(2p,R)$ 不可约表示 $\Gamma_{2p}=(m_{12p},m_{22p},\cdots,m_{p\ 2p})$ 的维数为

$$\mathrm{d}(\Gamma_{2p})=\frac{\mathrm{d}(A_p)}{1+m_{p-1\ 2p}}\prod_{k}(1+\frac{m_{k\ 2p}+m_{p\ 2p}}{p-k})\prod_{j,i}(1+\frac{m_{i\ 2p}+m_{j\ 2p}}{2p-i-j}),\tag{3.13}$$

其中 $k=1,\cdots,p-2$, $j=2,\cdots,p-2$, $i=1,\cdots,j-1$,

$$\mathrm{d}(A_p)=\prod_{k=1}^{p}(1+\frac{m_{k\ 2p}+m_{p-1\ 2p}}{p+1-k})\prod_{j,i}(1+\frac{m_{i\ 2p}-m_{j+1\ 2p}}{j+1-i}),$$

$j=1,\cdots,p-1$, $i=1,\cdots,j$, 以后求表示时常用变数 $x_{k\ 2p+1}=m_{k\ 2p+1}+p-k$, 和 $x_{k\ 2p}=m_{k\ 2p}+p-k$, 维数公式表成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1})&=p!\prod_{i=1}^{p}\frac{(2p-2i)!}{i!(2p-i)!}(x_{i\ 2p+1}+x_{p\ 2p+1}+1)\\&\times\prod_{j=1}^{p-1}\prod_{k=1}^{j}(x_{k\ 2p+1}-x_{j+1\ 2p+1})(x_{k\ 2p+1}+x_{j\ 2p+1}+1).\end{aligned}\tag{3.12'}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Gamma_{2p})&=p!\prod_{i=1}^{p}\frac{(2p-2i)!}{i!(2p-i-1)!}(x_{p-1\ 2p}+x_{p\ 2p})(x_{p-1\ 2p}-x_{p\ 2p})\\&\times\prod_{j=1}^{p-2}(x_{j\ 2p}+x_{p\ 2p})(x_{j\ 2p}+x_{p-1\ 2p})(x_{j\ 2p}-x_{p\ 2p})(x_{j\ 2p}-x_{p-1\ 2p})\\&\times\prod_{l=2}^{p-2}\prod_{k=1}^{l-1}(x_{k\ 2p}+x_{l\ 2p})(x_{k\ 2p}-x_{l\ 2p}).\end{aligned}\tag{3.13'}$$

以后求表示时常用到不可约表示维数之比. 设
$\Gamma_n(\pm i)=(m_{1n},\cdots,m_{i-1\ n},m_{i\ n}\pm 1,m_{i+1,n},\cdots,m_{p\ n})$, 即 $\Gamma_n(\pm i)$

的最高权除分量 $m_{i\,n}$ 与 Γ_n 差正负 1 外，其余分量完全一样，有维数比公式如下：

$$\frac{\mathrm{d}(\Gamma_{2p})}{\mathrm{d}(\Gamma_{2p}(\pm i))}=\frac{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\,2p}-x_{i\,2p})(x_{k\,2p}+x_{i\,2p})}{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\,2p}-x_{i\,2p}\mp 1)(x_{k\,2p}+x_{i\,2p}\pm 1)},\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1})}{\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1}(i))}=&\frac{(2x_{i\,2p+1}+1)}{(2x_{i\,2p+1}+3)}\\&\times\frac{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\,2p+1}-x_{i\,2p+1})(x_{k\,2p+1}+x_{i\,2p+1}+1)}{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\,2p+1}-x_{i\,2p+1}-1)(x_{k\,2p+1}+x_{i\,2p+1}+2)},\end{aligned}\tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1})}{\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1}(-i))}\\&=\frac{(2x_{i\,2p+1}+1)}{(2x_{i\,2p+1}-1)}\frac{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\,2p+1}-x_{i\,2p+1})(x_{k\,2p+1}+x_{i\,2p+1}+1)}{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\,2p+1}-x_{i\,2p+1}+1)(x_{k\,2p+1}+x_{i\,2p+1})}.\end{aligned}\tag{3.15b}$$

本章给出的是 $o(n,R)$ 的有限维不可约厄米表示，这些有限维不可约厄米表示的复扩充是 $o(n,C)$ 的有限维不可约表示，但不是厄米表示.

3.2 $o(4,R)$ 的表示

$o(2,R)$ 是一维可解李代数，其生成元为 $\mathrm{i}I_{2\,1}$，它的有限维不可约表示只有一维的. 设表示空间的基为 $|m_{1\,2}\rangle$，则有

$$\mathrm{i}I_{2\,1}|m_{1\,2}\rangle=m_{1\,2}|m_{1\,2}\rangle.$$

可将表示记为 $\Gamma_2=m_{1\,2}$.

$o(3,R)$ 除 $\mathrm{i}I_{2\,1}$ 外，还有生成元 $\mathrm{i}I_{3\,1},\mathrm{i}I_{3\,2}$. 设 $o(3,R)$ 有限维不可约表示为 $\Gamma_3=(m_{1\,3})$. 在节 1.5 中 $J_0=\mathrm{i}I_{2\,1}$，$J_{\pm1}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}I_{3\,2}\pm I_{3\,1})$，$j=m_{1\,3}$，$m=m_{1\,2}$. 并且已求得 $o(3,R)\supset o(2,R)$ 的不可约厄米表示和约化系数，即 CG 系数. 本章 $o(3,R)$ 表示矩阵将采用

节 1.5 中结果，但约化系数 $\langle 1\ m_2\ j_1\ m_1|j\ m\rangle$ 相因子的取法与节 1.5 的 Condon-Shortley 惯例不同，具体结果见表 3.1.

表 3.1 CG系数 $\langle 1\ m_2\ j_1\ m_1|j\ m\rangle$

j	$m_2=1$	$m_2=0$	$m_2=-1$
j_1+1	$\sqrt{\frac{(j_1+m_1+1)(j_1+m_1+2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_1+1)(j_1+m_1+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_1+1)(j_1-m_1+2)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
j_1	$-\sqrt{\frac{(j_1+m_1+1)(j_1-m_1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\frac{m_1}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_1+1)(j_1+m_1)}{2j_1(j_1+1)}}$
j_1-1	$-\sqrt{\frac{(j_1-m_1-1)(j_1-m_1)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m_1)(j_1+m_1)}{j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1+m_1)(j_1+m_1-1)}{2j_1(2j_1+1)}}$

由表 3.1 可以看出，此修改为将 Condon-Shortley 惯例中 $j=j_1$ 和 $j=j_1-1$ 所有 CG 系数改变符号. 修改后的 CG 系数满足对称关系，

$$\langle 1\ q\ j_1\ m_1|j\ m\rangle=(-)^q\sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}}\langle 1\ -q\ j\ m|j_1\ m_1\rangle, \tag{3.16}$$

对 $o(3,R)$ CG 系数相因子的修改，是为了 $o(4,R)$ 的表示矩阵比较简单. 以后会看到，$o(n-1,R)$ 约化系数的对称性决定 $o(n,R)$ 表示矩阵的对称性. 而 $o(n,R)$ 表示矩阵的对称性又决定了 $o(n,R)$ 约化系数的对称性. 所以修改 $o(3,R)$ CG 系数相因子对后面 $o(n,R)$ 表示矩阵和约化系数有较为简单的相因子起了关键作用.

$o(4,R)$ 包含 $o(3,R)$，所以其生成元除 $o(3,R)$ 的生成元外，还有生成元 $\mathrm{i}I_{4\,1},\mathrm{i}I_{4\,2},\mathrm{i}I_{4\,3}$. 设 $o(4,R)$ 有限维不可约厄米表示为 $\Gamma_4=(m_{1\,4},m_{2\,4})$，用 $o(4,R)\supset o(3,R)\supset o(2,R)$ 来标记 Γ_4 表示空间的态，因为上述每步都是简单约化，所以这标记是正交完备的. 用 Γ_3,Γ_2 标记 $o(3,R),o(2,R)$ 的不可约表示，则 Γ_4 包含满足下式的 Γ_3,Γ_2 各一次.

$$\begin{aligned}&m_{1\,4}\geq m_{1\,3}\geq|m_{2\,4}|,\\&m_{1\,3}\geq m_{1\,2}\geq -m_{1\,3}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

所以可以取 $\left|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix}m_{1\,4}\ \ m_{2\,4}\\ m_{1\,3}\\ m_{1\,2}\end{matrix}\right\rangle$ 为 Γ_4 表示空间的正交完备归一基.

记 $\hat{\Gamma}_3 = (m_{1\,4})$, $\hat{\Gamma}_2 = (m_{1\,3})$, 记 $\check{\Gamma}_3 = (|m_{2\,4}|)$, $\check{\Gamma}_2 = (-m_{1\,3})$, 对固定的 Γ_4, Γ_3 的最高值为 $\hat{\Gamma}_3$, Γ_3 的最低值为 $\check{\Gamma}_3$, 对固定的 Γ_3, Γ_2 的最高值为 $\hat{\Gamma}_2$, Γ_2 的最低值为 $\check{\Gamma}_2$. Γ_4 的最高权态为 $\left|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \hat{\Gamma}_3\\ \hat{\Gamma}_2\end{matrix}\right\rangle$.

由于 $o(3,R)$ 生成元的表示矩阵是已知的. 所以求 $o(4,R)$ 的表示, 只须求生成元 $\mathrm{i}I_{4\,1},\mathrm{i}I_{4\,2},\mathrm{i}I_{4\,3}$ 的表示矩阵. 把它们写成张量基形式

$$\begin{aligned}&T^{(3)}(\beta_3) = \mathrm{i}I_{4\,3},\\ &T^{(3)}(\beta_{+1}) = \sqrt{1/2}(I_{4\,2} - \mathrm{i}I_{4\,1}),\\ &T^{(3)}(\beta_{-1}) = \sqrt{1/2}(I_{4\,2} + \mathrm{i}I_{4\,1}).\end{aligned} \tag{3.18}$$

由已知 $o(3,R)$ 的 (1) 不可约表示矩阵

$$\begin{aligned}&\langle 1\ m'_{1\,2}|J_0|1\ m_{1\,2}\rangle = m_{1\,2}\delta_{m'_{1\,2}\ m_{1\,2}},\\ &\langle 1\ m'_{1\,2}|J_{\pm1}|1\ m_{1\,2}\rangle = \mp\sqrt{(1\mp m_{1\,2})(2\pm m_{1\,2})/2}\,\delta_{m'_{1\,2}\ m_{1\,2}\pm1},\end{aligned}$$

和对易关系 (3.5), 知 $T^{(3)}(\beta_i)$ 和 $o(3,R)$ 生成元间满足下对易关系:

$$\begin{aligned}&[J_0, T^{(3)}(\beta_i)] = \sum_{\beta'_i}\langle 1\ \beta'_i|J_0|1\ \beta_i\rangle T^{(3)}(\beta'_i),\\ &[J_{\pm1}, T^{(3)}(\beta_i)] = \sum_{\beta'_i}\langle 1\ \beta'_i|J_{\pm1}|1\ \beta_i\rangle T^{(3)}(\beta'_i).\end{aligned} \tag{3.19}$$

这说明 $T^{(3)}(\beta_3), T^{(3)}(\beta_{+1}), T^{(3)}(\beta_{-1})$ 构成 $o(3,R)$ 的 (1) 秩不可约张量, 它们分别对应于 $m_{1\,2} = 0, 1, -1$ 分量. 由 Wigner-Eckart 定

理和已知的 $o(3,R)$ CG 系数，求 $T^{(3)}(\beta_i)$ 的表示矩阵问题，就变成求它们的约化矩阵元问题. 定义约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m'_{1\,3} \\ m'_{1\,2} \end{matrix} \middle| T^{(3)}(\beta_i) \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \\ m_{1\,2} \end{matrix} \right\rangle = \langle 1\,\beta_i\, m_{1\,3}\, m_{1\,2} | m'_{1\,3}\, m'_{1\,2}\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m'_{1\,3} \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.20}$$

从定义知不可约张量 $T^{(3)}(\beta_i)$ 的厄米共轭为

$$\begin{aligned} T^{(3)}(\beta_3)^\dagger &= T^{(3)}(\beta_3), \\ T^{(3)}(\beta_{\pm1})^\dagger &= -T^{(3)}(\beta_{\mp1}). \end{aligned}$$

由约化矩阵元定义, 厄米共轭条件和 $o(3,R)$ CG 系数对称性 (3.16), 取相因子使约化矩阵元为实，可得约化矩阵元满足的对称性,

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m'_{1\,3} \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{2m_{1\,3}+1}{2m'_{1\,3}+1}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m'_{1\,3} \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.21}$$

考虑对易关系 $[T^{(3)}(\beta_3), T^{(3)}(\beta_{+1})] = J_{+1}$, 从左和右分别作用 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \\ m_{1\,3} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ m_{1\,3}-1 \\ m_{1\,3}-1 \end{matrix} \right\rangle$, 代入 $o(3,R)$ 的 CG 系数和约化矩阵元对称性，用 $x_{1\,3} = m_{1\,3}$ 作变数，可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{(x_{1\,3}+1)}{(x_{1\,3}-1)}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.22}$$

齐次方程 (3.22) 就是一个递推关系.

考虑对易关系 $[T^{(3)}(\beta_3), T^{(3)}(\beta_{+1})] = J_{+1}$, 从左和右分别作用

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \\ m_{1\,3} \end{array} \right| \text{和} \left| \begin{array}{l} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \\ m_{1\,3}-1 \end{array} \right\rangle$$，可得约化矩阵元满足的非齐次方程

$$\begin{aligned}
&\frac{(2x_{1\,3}-1)}{x_{1\,3}(2x_{1\,3}+1)} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{array} \right\| T^{(3)} \left\| \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{array} \right\rangle^2 \\
&= \frac{(2x_{1\,3}+3)}{(x_{1\,3}+1)(2x_{1\,3}+1)} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(1) \end{array} \right\| T^{(3)} \left\| \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{array} \right\rangle^2 \\
&\quad - \frac{1}{x_{1\,3}(x_{1\,3}+1)} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{array} \right\| T^{(3)} \left\| \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{array} \right\rangle^2 + 1. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

已知 $T^{(3)}(\beta_3)$ 是 Cantan 子代数的一个基，所以对最高权态有

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ m_{1\,4} \\ m_{1\,4} \end{array} \right| T^{(3)}(\beta_3) \left| \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ m_{1\,4} \\ m_{1\,4} \end{array} \right\rangle = m_{2\,4}.$$

用 $x_{1\,4}=m_{1\,4}+1, x_{2\,4}=m_{2\,4}$ 作变数，可以解出最高权态的约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ m_{1\,4} \end{array} \right\| T^{(3)} \left\| \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ m_{1\,4} \end{array} \right\rangle = \frac{x_{1\,4}x_{2\,4}}{\sqrt{x_{1\,4}(x_{1\,4}-1)}}.$$

用数学归纳法从递推关系 (3.22) 可得

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \end{array} \right\| T^{(3)} \left\| \begin{array}{c} \Gamma_4 \\ m_{1\,3} \end{array} \right\rangle = \frac{x_{1\,4}x_{2\,4}}{\sqrt{x_{1\,3}(x_{1\,3}+1)}}. \qquad (3.24a)$$

将此代入 (3.23)，并利用约化矩阵元对称性，可得递推关系

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{x_{1\,3}(2x_{1\,3}+1)}{(2x_{1\,3}-1)}$$

$$\times \left[1 - \frac{x_{1\,4}^2 x_{2\,4}^2}{x_{1\,3}^2(x_{1\,3}+1)^2} + \frac{1}{x_{1\,3}+1} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(1) \end{matrix} \right\rangle^2 \right]. \tag{3.25}$$

从最高权态出发，取相因子使约化矩阵元为正，用数学归纳法从递推关系 (3.25) 可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{(x_{1\,4}^2 - x_{1\,3}^2)(x_{1\,3}^2 - x_{2\,4}^2)}{x_{1\,3}(2x_{1\,3}-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\prod_{k=1}^2 (x_{k\,4} - x_{1\,3})(x_{k\,4} + x_{1\,3})}{x_{1\,3}(2x_{1\,3}-1)}}. \tag{3.24b}$$

再利用约化矩阵元对称性可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{[x_{1\,4}^2 - (x_{1\,3}+1)^2][(x_{1\,3}+1)^2 - x_{2\,4}^2]}{(x_{1\,3}+1)(2x_{1\,3}+3)}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\prod_{k=1}^2 (x_{k\,4} - x_{1\,3} - 1)(x_{k\,4} + x_{1\,3} + 1)}{(x_{1\,3}+1)(2x_{1\,3}+3)}}. \tag{3.24c}$$

式 (3.24) 给出全部约化矩阵元结果.

通过计算可以看出，按李代数链 $o(4,R) \supset o(3,R) \supset o(2,R)$ 所选的基，$\left| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$，除最高权态外，一般不是 Cartan 子代数的本征态. 所以 $o(n,R)$ 的 Gelfand 基，表示空间不是按权分解的. 这与 $u(n)$ 的 Gelfand 基，表示空间是按权分解的不一样.

以下讨论 $o(4,R)$ 不可约表示直积约化. 设 $\Gamma_4' = (m_{1\,4}', m_{2\,4}')$, $\Gamma_4'' = (m_{1\,4}'', m_{2\,4}'')$ 是 $o(4,R)$ 的两个不可约表示，它们的直积约化

为 $\Gamma_4'\otimes\Gamma_4''\cong\oplus_{\Gamma_4}m_{\Gamma_4}\Gamma_4$. 注意此直积一般不是简单约化的， m_{Γ_4} 是不可约表示 Γ_4 的重复度. 取 $\Gamma_4',\Gamma_4'',\Gamma_4$ 表示空间的基分别为

$$\left|\begin{matrix}\Gamma_4'\\ \Gamma_3'\\ \Gamma_2'\end{matrix}\right\rangle,\quad \left|\begin{matrix}\Gamma_4''\\ \Gamma_3''\\ \Gamma_2''\end{matrix}\right\rangle,\quad \left|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle,$$

$o(4,R)$ 的 CG 系数为

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma_4' & \Gamma_4''\\ \Gamma_3' & \Gamma_3''\\ \Gamma_2' & \Gamma_2''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta\,\Gamma_4\\ \Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}\Gamma_4' & \Gamma_4''\\ \Gamma_3' & \Gamma_3''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta\,\Gamma_4\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_3' & \Gamma_3''\\ \Gamma_2' & \Gamma_2''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle, \tag{3.26}$$

其中 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_3' & \Gamma_3''\\ \Gamma_2' & \Gamma_2''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle$ 为已知的 $o(3,R)$ 的 CG 系数，所以求 $o(4,R)$ 的 CG 系数问题就变成求 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_4' & \Gamma_4''\\ \Gamma_3' & \Gamma_3''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta\,\Gamma_4\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle$, 即变成为求 $o(4,R)$ 的约化标量因子的问题. 其中 $\beta=1,\cdots,m_{\Gamma_4}$, 是标记非简单约化的量子数.

从 $T^{(3)}(\beta_3)$ 的左边乘以 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_4' & \Gamma_4''\\ \Gamma_3' & \Gamma_3''\\ \Gamma_2' & \Gamma_2''\end{matrix}\right|$ 右边乘以 $\left|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle$, 可得约化标量因子满足的基本方程

$$\begin{aligned}&\sum_{\tilde\Gamma_3}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_3\\ 0 & \Gamma_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tilde\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_3' & \Gamma_3''\\ \Gamma_2' & \Gamma_2''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tilde\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle\\ &\quad\times\left\langle\begin{matrix}\Gamma_4\\ \tilde\Gamma_3\end{matrix}\middle\|T^{(3)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_4' & \Gamma_4''\\ \Gamma_3' & \Gamma_3''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta\Gamma_4\\ \tilde\Gamma_3\end{matrix}\right\rangle\\ &=\sum_{\tilde\Gamma_3'}\left\langle\begin{matrix}1 & \tilde\Gamma_3'\\ 0 & \Gamma_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3'\\ \Gamma_2'\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\tilde\Gamma_3' & \Gamma_3''\\ \Gamma_2' & \Gamma_2''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle\end{aligned}$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4' \\ \Gamma_3' \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4' \\ \tilde{\Gamma}_3' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4' & \Gamma_4'' \\ \tilde{\Gamma}_3' & \Gamma_3'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
+ \sum_{\tilde{\Gamma}_3''} \left\langle \begin{matrix} 1 & \tilde{\Gamma}_3'' \\ 0 & \Gamma_2'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3'' \\ \Gamma_2'' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_3' & \tilde{\Gamma}_3'' \\ \Gamma_2' & \Gamma_2'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3'' \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \tilde{\Gamma}_3'' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4' & \Gamma_4'' \\ \Gamma_3' & \tilde{\Gamma}_3'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.27}
$$

量子数 β 标明方程 (3.27) 有 m_{Γ_4} 组线性无关解.

当 $\Gamma_4' = 1$ 时，直积无简并存在. 以下求 $\Gamma_4' = 1$ 的约化标量因子. 取 $\Gamma_3' = \Gamma_2' = 0$, 由基本方程 (3.27), 代入已知的 $o(3, R)$ CG 系数和 $o(4, R)$ 约化矩阵元的对称性， Γ_3'' 分别取 $\Gamma_3, \Gamma_3 - 1, \Gamma_3 + 1$ 时，可得约化标量因子满足下列关系,

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 1 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left[\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle - \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \right]. \tag{3.28a}
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 1 & \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 0 & \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
- \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.28b}
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 1 & \Gamma_3(1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 0 & \Gamma_3(1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(1) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$-\left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3(1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.28c}$$

同理，取 $\Gamma_3' = 1$, $\Gamma_2' = 0$, 由基本方程 (3.27), 并代入式 (3.28), 可得

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad\times \left[\sqrt{\frac{x_{1\,3}-1}{x_{1\,3}+1}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \right. \\
&\quad + \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \left. -2\sqrt{\frac{x_{1\,3}-1}{x_{1\,3}+1}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \right] \\
&= \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ 0 & \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad\times \left[2 \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle \right. \\
&\quad - \sqrt{\frac{x_{1\,3}-1}{x_{1\,3}+1}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \left. - \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle \right].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

将 $o(4,R)$ 约化矩阵元代入上二式，可得从 $\Gamma_3' = 0$ 的约化标量因子计算 $\Gamma_3' = 1$ 约化标量因子的公式，

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4(\mp i) \\ 1 & \Gamma_3(1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\pm x_{i\,4} + x_{1\,3}}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4(\mp i) \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4(\mp i) \\ \Gamma_3(1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4(\mp i) \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.30a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4(\mp i) \\ 1 & \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\pm x_{i\,4} - x_{1\,3} - 1}$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4(\mp i) \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4(\mp i) \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4(\mp i) \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.30b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4(\mp i) \\ 1 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\pm x_{i\,4} - 1}$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4(\mp i) \\ \Gamma_3 \end{matrix} \middle\| T^{(3)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_4(\mp i) \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4(\mp i) \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.30c}$$

以及从 Γ_3 大递推到 Γ_3 小的约化标量因子递推公式

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4 \\ 0 & \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4(i) \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{(x_{i\,4} + x_{1\,3})(x_{i\,4} - x_{1\,3} + 1)}{(x_{i\,4} - x_{1\,3})(x_{i\,4} + x_{1\,3} + 1)}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4 \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4(i) \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.31}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4 \\ 0 & \Gamma_3(-1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4(-i) \\ \Gamma_3(-1) \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{(x_{i\,4} - x_{1\,3})(x_{i\,4} + x_{1\,3} - 1)}{(x_{i\,4} + x_{1\,3})(x_{i\,4} - x_{1\,3} - 1)}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4 \\ 0 & \Gamma_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4(-i) \\ \Gamma_3 \end{matrix} \right\rangle.$$

递推关系 (3.31) 不能完全确定约化标量因子的数值. 约化标量因子的绝对值可以通过正交归一关系确定. 对最高权态 $\hat{x}_{1\,3} = x_{1\,4} - 1$, 通过满足正交归一条件,

$$\sum_{\Gamma_3', \Gamma_3''} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4'' \\ \Gamma_3' & \Gamma_3'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \hat{\Gamma}_3 \end{matrix} \right\rangle^2 = 1,$$

规定 $\Gamma_3'=0$ 态的相因子使约化标量因子为正，可以求得最高权态的约化系数为，

$$\begin{aligned}
&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4(\pm 2)\\ 0 & \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{(x_{1\,4}\pm x_{2\,4})}{2(x_{1\,4}\pm x_{2\,4}+1)}},\\
&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4(1)\\ 0 & \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{x_{1\,4}}{(x_{1\,4}-x_{2\,4}+1)(x_{1\,4}+x_{2\,4}+1)}},\\
&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4(-1)\\ 0 & \hat{\Gamma}_3(-1)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \hat{\Gamma}_3(-1)\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{x_{1\,4}-1}{(x_{1\,4}-x_{2\,4}-1)(x_{1\,4}+x_{2\,4}-1)}}.
\end{aligned}\tag{3.32}$$

由 (3.32) 出发，利用 (3.31) 递推，用数学归纳法可得

$$\begin{aligned}
&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4(i)\\ 0 & \Gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{(x_{i\,4}-x_{1\,3})(x_{i\,4}+x_{1\,3}+1)}{2\prod_{k\neq i}^{2}(x_{i\,4}-x_{k\,4}+1)(x_{i\,4}+x_{k\,4}+1)}},\\
&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4(-i)\\ 0 & \Gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{(x_{i\,4}+x_{1\,3})(x_{i\,4}-x_{1\,3}-1)}{2\prod_{k\neq i}^{2}(x_{i\,4}-x_{k\,4}-1)(x_{i\,4}+x_{k\,4}-1)}}.
\end{aligned}\tag{3.33}$$

(3.33) 和 (3.30) 给出全部 $o(4,R)$ 的约化标量因子．并具有下列对称性，

$$\begin{aligned}
&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4\\ 0 & \Gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4(\pm i)\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma_4(\pm i))}{\mathrm{d}(\Gamma_4)}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4(\pm i)\\ 0 & \Gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle,\\
&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4\\ 1 & \Gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4(\pm i)\\ \Gamma_3'\end{matrix}\right\rangle=\sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma_4(\pm i))\mathrm{d}(\Gamma_3)}{\mathrm{d}(\Gamma_4)\mathrm{d}(\Gamma_3')}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_4(\pm i)\\ 1 & \Gamma_3'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \Gamma_3\end{matrix}\right\rangle.
\end{aligned}\tag{3.34}$$

3.3 $o(5,R)$ 的表示

$o(5,R)$ 包含 $o(4,R)$，所以其生成元除 $o(4,R)$ 的生成元外，还有生成元 $iI_{5\,1},iI_{5\,2},iI_{5\,3},iI_{5\,4}$. 设 $o(5,R)$ 有限维不可约厄米表示

为 $\Gamma_5=(m_{1\,5},m_{2\,5})$, 用 $o(5,R)\supset o(4,R)\supset o(3,R)\supset o(2,R)$ 来标记 Γ_5 表示空间的态，因为上述每步都是简单约化，所以这标记是正交完备的. 用 $\Gamma_4,\Gamma_3,\Gamma_2$ 标记 $o(4,R),o(3,R),o(2,R)$ 的不可约表示，则 Γ_5 包含满足下式的 $\Gamma_4,\Gamma_3,\Gamma_2$ 各一次.

$$
\begin{aligned}
&m_{1\,5}\geq m_{1\,4}\geq m_{25}\geq m_{2\,4}\geq -m_{2\,5},\\
&m_{1\,4}\geq m_{1\,3}\geq |m_{2\,4}|,\\
&m_{1\,3}\geq m_{1\,2}\geq -m_{1\,3}.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

记 $\hat{\Gamma}_4=(m_{1\,5},m_{2\,5})$, $\hat{\Gamma}_3=(m_{1\,4})$, $\hat{\Gamma}_2=(m_{1\,3})$, 对固定的 Γ_5, Γ_4 的最高值为 $\hat{\Gamma}_4$, 对固定的 Γ_4, Γ_3 的最高值为 $\hat{\Gamma}_3$, 对固定的 Γ_3, Γ_2 的最高值为 $\hat{\Gamma}_2$. 而 Γ_5 表示空间的正交完备归一基可以取为

$$
\left|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\\ \Gamma_3\\ \Gamma_2\end{matrix}\right\rangle=\left|\begin{matrix}m_{1\,5}\ \ m_{2\,5}\\ m_{1\,4}\ \ m_{2\,4}\\ m_{1\,3}\\ m_{1\,2}\end{matrix}\right\rangle,\ \Gamma_5\ \text{的最高权态为}\left|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \hat{\Gamma}_4\\ \hat{\Gamma}_3\\ \hat{\Gamma}_2\end{matrix}\right\rangle.
$$

由于 $o(4,R)$ 生成元的表示矩阵和约化系数是已知的. 所以求 $o(5,R)$ 的表示，只需求生成元 $\mathrm{i}I_{5\,1},\mathrm{i}I_{5\,2},\mathrm{i}I_{5\,3},\mathrm{i}I_{5\,4}$ 的表示矩阵. 把它们写成张量基形式

$$
\begin{aligned}
&T^{(4)}(\beta_4)=\mathrm{i}I_{5\,4},\\
&T^{(4)}(\beta_3)=I_{5\,3},\\
&T^{(4)}(\beta_{\pm1})=\sqrt{1/2}(-\mathrm{i})(I_{5\,2}\mp\mathrm{i}I_{5\,1}).
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

由 $T^{(4)}(\beta_i)$ 与 $o(3,R)$ 生成元对易关系知 $T^{(4)}(\beta_4)$ 是 $o(3,R)$ 的 (0) 秩不可约张量， $T^{(4)}(\beta_{\pm1}),T^{(4)}(\beta_3)$ 是 $o(3,R)$ 的 (1) 秩不可约张量. 而 $T^{(4)}(\beta_{\pm1}),T^{(4)}(\beta_3)$ 与 $T^{(3)}(\beta_{\pm1}),T^{(3)}(\beta_3)$ 除将 $I_{5\,k}$ 的下标 5 变为 4 外，整体差常数 $-\mathrm{i}$. 所以看 $T^{(4)}(\beta_i)$ 的不可约张量性质，主要看它们与 $T^{(3)}(\beta_i)$ 的对易关系. 从上节可以算出，$T^{(3)}(\beta_i)$ 在不可约表示 (1) 中，有以下非零矩阵元

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| T^{(3)}(\beta_{\pm 1}) \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \mp 1 \end{matrix} \right\rangle = -1,
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{matrix} \middle| T^{(3)}(\beta_{\pm 1}) \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1,
\tag{3.37}
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| T^{(3)}(\beta_3) \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1,
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \middle| T^{(3)}(\beta_3) \middle| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1,
$$

从对易关系 (3.5), 知 $T^{(4)}(\beta_i)$ 和 $T^{(3)}(\beta_i)$ 有以下非零对易关系

$$
\begin{aligned}
&[T^{(3)}(\beta_{\pm 1}), T^{(4)}(\beta_{\mp 1})] = -T^{(4)}(\beta_4), \\
&[T^{(3)}(\beta_{\pm 1}), T^{(4)}(\beta_4)] = T^{(4)}(\beta_{\pm 1}), \\
&[T^{(3)}(\beta_3), T^{(4)}(\beta_3)] = T^{(4)}(\beta_4), \\
&[T^{(3)}(\beta_3), T^{(4)}(\beta_4)] = T^{(4)}(\beta_3),
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

这说明 $T^{(4)}(\beta_i)$ 构成 $o(4,R)$ 的 (1) 秩不可约张量, $T^{(4)}(\beta_4)$ 对应 $m_{1\,3}=0, m_{1\,2}=0$ 的分量, 而 $T^{(4)}(\beta_3), T^{(4)}(\beta_{+1}), T^{(4)}(\beta_{-1})$ 则分别对应于 $m_{1\,3}=1, m_{1\,2}=0,1,-1$ 的分量. 由 Wigner-Eckart 定理和已知的 $o(4,R)$ CG 系数, 求 $T^{(4)}(\beta_i)$ 的表示矩阵问题, 就变成求它们的约化矩阵元问题. 将 Γ_4 的分量指标 Γ_3, Γ_2 简写成 γ_4, 定义约化矩阵元为

$$
\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4' \\ \gamma_4' \end{matrix} \right| T^{(4)}(\beta_i) \left| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \\ \gamma_4 \end{matrix} \right\rangle
= \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4 \\ \beta_i & \gamma_4 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_4' \\ \gamma_4' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4' \end{matrix} \right\| T^{(4)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle . \tag{3.39}
$$

从定义 (3.36) 知不可约张量 $T^{(4)}(\beta_i)$ 的厄米共轭为

$$
\begin{aligned}
&T^{(4)}(\beta_i)^\dagger = T^{(4)}(\beta_i), \quad i = \pm 1, 4, \\
&T^{(4)}(\beta_3)^\dagger = -T^{(4)}(\beta_3).
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

由约化矩阵元定义, 厄米共轭条件和 $o(4,R)$ CG 系数对称性 (3.34), 取相因子使约化矩阵元为实, 可得约化矩阵元满足的对称性,

$$
\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\| T^{(4)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4' \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma_4')}{\mathrm{d}(\Gamma_4)}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4' \end{matrix} \right\| T^{(4)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle . \tag{3.41}
$$

其中 $\mathrm{d}(\Gamma_4)$ 是不可约表示 Γ_4 的维数.

考虑不可约张量间对易关系

$$
[T^{(4)}(\beta_4), T^{(4)}(\beta_3)] = -T^{(3)}(\beta_3), \tag{3.42}
$$

用 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \\ \hat{\Gamma}_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right|$ 从左, 用 $\left| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \\ \hat{\Gamma}_3(-1) \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \\ \hat{\Gamma}_3 \\ \Gamma_2 \end{matrix} \right\rangle$ 分别从右作用于对易关系 (3.42), 代入 $o(4,R)$ 的 CG 系数和约化矩阵元对称性,

可得约化矩阵元的下面两个非齐次方程

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(x_{2\,4}-1)}{(x_{1\,4}-x_{2\,4})(x_{1\,4}+x_{2\,4})}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-2)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&+\frac{(x_{1\,4}-1)}{(x_{1\,4}-x_{2\,4})(x_{1\,4}+x_{2\,4})}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-1)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&-\frac{(x_{1\,4}+1)}{(x_{1\,4}-x_{2\,4})(x_{1\,4}+x_{2\,4})}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(1)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&+\frac{(x_{2\,4}+1)}{(x_{1\,4}-x_{2\,4})(x_{1\,4}+x_{2\,4})}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(2)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 = 1,
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{x_{k\,4}}\left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_4\\ 0 & \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix}\Gamma_4(-2)\\ \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\right\rangle^2 \left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-2)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&\quad -\sum_{k=1}^{2}\frac{2}{x_{k\,4}}\left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_4\\ 0 & \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix}\Gamma_4(k)\\ \hat{\Gamma}_3\end{matrix}\right\rangle^2 \left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&=\frac{(x_{1\,4}+x_{2\,4}-1)}{x_{2\,4}(x_{1\,4}+x_{2\,4})}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-2)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&\quad -\frac{2}{(x_{1\,4}-x_{2\,4})(x_{1\,4}+x_{2\,4})}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(1)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&\quad -\frac{(x_{1\,4}-x_{2\,4}-1)}{x_{2\,4}(x_{1\,4}-x_{2\,4})}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(2)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 = 1.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

从 (3.43),(3.44) 可以解出递推关系,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-1)\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle^2 &= \frac{x_{1\,4}(x_{1\,4}+x_{2\,4})}{x_{1\,4}+x_{2\,4}-1} \\
&+\frac{(x_{1\,4}+x_{2\,4})^2}{(x_{1\,4}+x_{2\,4}-1)(x_{1\,4}+x_{2\,4}+1)}\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(1)\end{matrix}\right\rangle^2 \\
&-\frac{2x_{1\,4}(x_{1\,4}+x_{2\,4})}{(x_{1\,4}+x_{2\,4}-1)(x_{1\,4}-x_{2\,4}-1)(x_{1\,4}+x_{2\,4}+1)}
\end{aligned}
$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(2) \end{matrix} \right\rangle^2, \tag{3.45a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-2) \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{x_{2\,4}(x_{1\,4}+x_{2\,4})}{x_{1\,4}+x_{2\,4}-1}$$

$$+\frac{2x_{2\,4}(x_{1\,4}+x_{2\,4})}{(x_{1\,4}+x_{2\,4}-1)(x_{1\,4}-x_{2\,4}+1)(x_{1\,4}+x_{2\,4}+1)}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(1) \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$+\frac{(x_{1\,4}+x_{2\,4})^2}{(x_{1\,4}+x_{2\,4}-1)(x_{1\,4}+x_{2\,4}+1)} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(2) \end{matrix} \right\rangle^2, \tag{3.45b}$$

对最高权态 $\hat{\Gamma}_4 = (m_{1\,5}, m_{2\,5})$, 可以解出

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4(-1) \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4 \end{matrix} \right\rangle^2 &= \frac{x_{1\,5}(x_{1\,5}+x_{2\,5})}{x_{1\,5}+x_{2\,5}-1}, \\ \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4(-2) \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4 \end{matrix} \right\rangle^2 &= \frac{x_{2\,5}(x_{1\,5}+x_{2\,5})}{x_{1\,5}+x_{2\,5}-1}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

从最高权态约化矩阵元 (3.46) 出发, 利用递推关系 (3.45), 用数学归纳法可得

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{2}(x_{k\,5}+x_{i\,4})(x_{k\,5}-x_{i\,4}+1)}{2\prod_{k\neq i}^{2}(x_{k\,4}+x_{i\,4}-1)(x_{k\,4}-x_{i\,4}+1)}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

再利用约化矩阵元对称性可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-i) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{2}(x_{k\,5} + x_{i\,4})(x_{k\,5} - x_{i\,4} + 1)}{2\prod_{k\neq i}^{2}(x_{k\,4} + x_{i\,4} - 1)(x_{k\,4} - x_{i\,4} + 1)}}. \tag{3.48}$$

式 (3.47)(3.48) 给出全部约化矩阵元结果. 在 (3.47) 式的证明过程中, 用到恒等式

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(A_k - b_i)}{\prod_{k=1}^{n}(a_k - b_i)} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{n}(A_j - a_k)}{(b_i - a_k)\prod_{j\neq k}^{n}(a_j - a_k)}. \tag{3.49}$$

用恒等式 (2.50), 通过比较系数可以证明此恒等式. 以后在求 $o(2p+1,R)$ 的不可约表示和约化系数中, 会经常用到恒等式 (3.49).

可以看出, 按李代数链 $o(5,R) \supset o(4,R) \supset o(3,R) \supset o(2,R)$ 所选的基, 也是除最高权态外, 一般不是 Cartan 子代数的本征态, 即表示空间不是按权分解的.

以下讨论 $o(5,R)$ 不可约表示直积约化. 设 $\Gamma'_5 = (m'_{1\,5}, m'_{2\,5})$, $\Gamma''_5 = (m''_{1\,5}, m''_{2\,5})$ 是 $o(5,R)$ 的两个不可约表示, 它们的直积约化为 $\Gamma'_5 \otimes \Gamma''_5 \cong \oplus_{\Gamma_5} m_{\Gamma_5}\Gamma_5$. 注意此直积一般不是简单约化的, m_{Γ_5} 是不可约表示 Γ_5 的重复度. 取 $\Gamma'_5, \Gamma''_5, \Gamma_5$ 表示空间的基分别为

$$\left|\begin{matrix}\Gamma'_5\\ \Gamma'_4\\ \gamma'_4\end{matrix}\right\rangle, \quad \left|\begin{matrix}\Gamma''_5\\ \Gamma''_4\\ \gamma''_4\end{matrix}\right\rangle, \quad \left|\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\\ \gamma_4\end{matrix}\right\rangle,$$

$o(5,R)$ 的 CG 系数为

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_5 & \Gamma''_5\\ \Gamma'_4 & \Gamma''_4\\ \gamma'_4 & \gamma''_4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta\,\Gamma_5\\ \Gamma_4\\ \gamma_4\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix}\Gamma'_5 & \Gamma''_5\\ \Gamma'_4 & \Gamma''_4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta\,\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_4 & \Gamma''_4\\ \gamma'_4 & \gamma''_4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \gamma_4\end{matrix}\right\rangle, \tag{3.50}$$

其中 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_4 & \Gamma''_4\\ \gamma'_4 & \gamma''_4\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_4\\ \gamma_4\end{matrix}\right\rangle$ 为已知的 $o(4,R)$ 的 CG 系数, 所以求 $o(5,R)$ 的 CG 系数问题就变成求 $o(5,R)$ 的约化标量因子

$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5' & \Gamma_5'' \\ \Gamma_4' & \Gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\,\Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle$ 的问题. $\beta = 1, \cdots, m_{\Gamma_5}$, 是标记非简单约化的量子数.

从 $T^{(4)}(\beta_4)$ 的左边乘以 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5' & \Gamma_5'' \\ \Gamma_4' & \Gamma_4'' \\ \gamma_4' & \gamma_4'' \end{matrix} \right|$ 右边乘以 $\left| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \\ \gamma_4 \end{matrix} \right\rangle$, 可得约化标量因子满足的基本方程

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{\Gamma}_4} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_4 \\ 0 & \gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \tilde{\Gamma}_4 \\ \gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4' & \Gamma_4'' \\ \gamma_4' & \gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \tilde{\Gamma}_4 \\ \gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \tilde{\Gamma}_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5' & \Gamma_5'' \\ \Gamma_4' & \Gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\Gamma_5 \\ \tilde{\Gamma}_4 \end{matrix} \right\rangle \\
&= \sum_{\tilde{\Gamma}_4'} \left\langle \begin{matrix} 1 & \tilde{\Gamma}_4' \\ 0 & \gamma_4' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4' \\ \gamma_4' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \tilde{\Gamma}_4' & \Gamma_4'' \\ \gamma_4' & \gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5' \\ \Gamma_4' \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5' \\ \tilde{\Gamma}_4' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5' & \Gamma_5'' \\ \tilde{\Gamma}_4' & \Gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad + \sum_{\tilde{\Gamma}_4''} \left\langle \begin{matrix} 1 & \tilde{\Gamma}_4'' \\ 0 & \gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4'' \\ \gamma_4'' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_4' & \tilde{\Gamma}_4'' \\ \gamma_4' & \gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_4 \\ \gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \Gamma_4'' \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \tilde{\Gamma}_4'' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5' & \Gamma_5'' \\ \Gamma_4' & \tilde{\Gamma}_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle . \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

β 表示方程 (3.51) 有 m_{Γ_5} 组线性无关解.

当 $\Gamma_5' = 1$ 时, 直积无简并存在. 以下求 $\Gamma_5' = 1$ 的约化标量因子. 取 $\Gamma_4' = 0$, 自然有 $\gamma_4' = 0$, $\gamma_4'' = \gamma_4$. 由基本方程 (3.51), 代入已知的 $o(4,R)$ CG 系数和 $o(5,R)$ 约化矩阵元对称性, 可得约化标量因子满足下列关系,

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 1 & \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left[\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \right\rangle - \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \right], \tag{3.52a}$$

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5(\pm i) \\ 1 & \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5(\pm i) \\ 0 & \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5(\pm i) \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5(\pm i) \\ \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5(\pm i) \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle . \end{aligned} \tag{3.52b}$$

同理，取 $\Gamma_4' = 1$, $\gamma_4' = 0$, $\Gamma_4'' = \Gamma_4(k^2)$ 和 $\Gamma_4'' = \Gamma_4((-k)^2)$ 由基本方程 (3.51), 并代入式 (3.52), 可得

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-k) \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5'' \\ 0 & \Gamma_4(k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(k) \end{matrix} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \Gamma_4(k) \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5'' \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \Gamma_4(k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5'' \\ \Gamma_4(-k) \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5'' \\ 0 & \Gamma_4(-k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-k) \end{matrix} \right\rangle , \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-k) \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5'' \\ 0 & \Gamma_4(-k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-k) \end{matrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left\langle \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k)\end{matrix}\right\rangle \left\langle \begin{matrix}\Gamma''_5\\ \Gamma_4\end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix}\Gamma''_5\\ \Gamma_4(-k)\end{matrix}\right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma''_5\\ 0 & \Gamma_4\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle \\
&\quad - \left\langle \begin{matrix}\Gamma''_5\\ \Gamma_4\end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix}\Gamma''_5\\ \Gamma_4(k)\end{matrix}\right\rangle \left\langle \begin{matrix}\Gamma''_5\\ \Gamma_4\end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix}\Gamma''_5\\ \Gamma_4(-k)\end{matrix}\right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma''_5\\ 0 & \Gamma_4(k)\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k)\end{matrix}\right\rangle,
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

将 $o(4,R)$ CG 系数和 $o(5,R)$ 约化矩阵元代入上二式，可得约化标量因子的递推关系，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_5(i)\\ 0 & \Gamma_4(-k)\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-k)\end{matrix}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{(x_{i\,5}-x_{k\,4}+2)(x_{i\,5}+x_{k\,4})}{(x_{i\,5}-x_{k\,4}+1)(x_{i\,5}+x_{k\,4}+1)}} \left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_5(i)\\ 0 & \Gamma_4\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle,
\end{aligned} \tag{3.55a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_5(-i)\\ 0 & \Gamma_4(-k)\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-k)\end{matrix}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{(x_{i\,5}-x_{k\,4}+1)(x_{i\,5}+x_{k\,4}-1)}{(x_{i\,5}-x_{k\,4})(x_{i\,5}+x_{k\,4})}} \left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_5(-i)\\ 0 & \Gamma_4\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.55b}
$$

取 $\Gamma'_4 = 1$, $\gamma'_4 = 0$, $\Gamma''_4 = \Gamma_4(k+j)$ 和 $\Gamma''_4 = \Gamma_4(k-j)$, 由基本方程 (3.51) 得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(k-j)\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k-j)\end{matrix}\right\rangle \\
&= \frac{(x_{k\,4}-x_{j\,4}+1)}{(x_{k\,4}-x_{j\,4})} \left\langle \begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(-j)\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-j)\end{matrix}\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$+\frac{(x_{k\,4}-x_{j\,4}+1)}{(x_{k\,4}-x_{j\,4})}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(k)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k)\end{matrix}\right\rangle$$

$$-\frac{(x_{k\,4}-x_{j\,4}+2)}{(x_{k\,4}-x_{j\,4})}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle, \tag{3.56a}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(-j)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-j)\end{matrix}\right\rangle\\ &=-\frac{(x_{k\,4}+x_{j\,4}-1)}{(x_{k\,4}+x_{j\,4}+1)}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(k)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k)\end{matrix}\right\rangle\\ &\quad+\frac{(x_{k\,4}+x_{j\,4})}{(x_{k\,4}+x_{j\,4}+1)}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(k-j)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k-j)\end{matrix}\right\rangle\\ &\quad+\frac{(x_{k\,4}+x_{j\,4})}{(x_{k\,4}+x_{j\,4}+1)}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.56b}$$

由 (3.53),(3.56) 可以解出,

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(k)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(k)\end{matrix}\right\rangle\\ &=-\frac{x_{j\,4}}{x_{k\,4}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(-j)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-j)\end{matrix}\right\rangle\\ &\quad+\frac{x_{j\,4}+x_{k\,4}}{x_{k\,4}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle,\\ &\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(-k)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-k)\end{matrix}\right\rangle\\ &=\frac{x_{j\,4}}{x_{k\,4}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4(-j)\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4(-j)\end{matrix}\right\rangle\\ &\quad+\frac{x_{k\,4}-x_{j\,4}}{x_{k\,4}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_5\\ 0 & \Gamma_4\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_5\\ \Gamma_4\end{matrix}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.57}$$

取 $\Gamma_4'=1$, $\gamma_4'=0$, $\Gamma_4''=\Gamma_4$, $\Gamma_3=\hat{\Gamma}_3$. 由基本方程 (3.51), 代入式

(3.57) 可得约化标量因子满足下方程,

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 & \Gamma_4 \end{array}\right\rangle \\
&= 2x_{j\,4}\left[\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4(-j) & \Gamma_4(-j) \end{array}\right\rangle - \left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 & \Gamma_4 \end{array}\right\rangle\right] \\
&\quad\times\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{x_{k\,4}}\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_4 & \Gamma_4(k) \\ 0 & \hat{\Gamma}_3 & \hat{\Gamma}_3 \end{array}\right\rangle^2 \left\langle\begin{array}{c} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(k) \end{array}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{array}{c} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{array}\right\rangle^2\right. \\
&\quad\left.-\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{x_{k\,4}}\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_4 & \Gamma_4(-k) \\ 0 & \hat{\Gamma}_3 & \hat{\Gamma}_3 \end{array}\right\rangle^2 \left\langle\begin{array}{c} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(-k) \end{array}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{array}{c} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{array}\right\rangle^2\right].
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

利用 (3.44) 得约化标量因子的另一递推关系,

$$
\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4(-j) & \Gamma_4(-j) \end{array}\right\rangle = \frac{x_{j\,4}-1}{x_{j\,4}}\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 & \Gamma_4 \end{array}\right\rangle. \tag{3.55c}
$$

从 (3.52),(3.55) 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5(i) & \Gamma_5 \\ 1 & \Gamma_4(\pm k) & \Gamma_4 \end{array}\right\rangle \\
&= -\frac{1}{x_{i\,5}\mp x_{k\,4}+1}\left\langle\begin{array}{c} \Gamma_5(i) \\ \Gamma_4 \end{array}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{array}{c} \Gamma_5(i) \\ \Gamma_4(\pm k) \end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5(i) & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 & \Gamma_4 \end{array}\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{3.59a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5(-i) & \Gamma_5 \\ 1 & \Gamma_4(\pm k) & \Gamma_4 \end{array}\right\rangle \\
&= \frac{1}{x_{i\,5}\pm x_{k\,4}}\left\langle\begin{array}{c} \Gamma_5(-i) \\ \Gamma_4 \end{array}\right\| T^{(4)} \left\|\begin{array}{c} \Gamma_5(-i) \\ \Gamma_4(\pm k) \end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_5(-i) & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 & \Gamma_4 \end{array}\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{3.59b}
$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 1 & \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \pm \frac{1}{x_{k\,4}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \middle\| T^{(4)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.59c}$$

递推关系 (3.55) 不能完全确定约化标量因子的数值. 约化标量因子的绝对值可以通过归一关系确定. 对最高权态 $\hat{x}_{1\,4} = x_{1\,5}, \hat{x}_{2\,4} = x_{2\,5}$, 通过满足正交归一条件,

$$\sum_{\Gamma_4', \Gamma_4''} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5'' \\ \Gamma_4' & \Gamma_4'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4 \end{matrix} \right\rangle^2 = 1,$$

规定态的相因子使 $\Gamma_4' = 0$ 的约化标量因子为正, 可以求得最高权态的约化标量因子为,

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 0 & \hat{\Gamma}_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_{p=1}^{2} x_{p\,5}}{\prod_{p=1}^{2} (x_{p\,5} + 1)}}, \tag{3.60a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5(i) \\ 0 & \hat{\Gamma}_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{2 \prod_{p=1}^{2} (x_{p\,5} + x_{i\,5} + 1)}{(2x_{i\,5} + 3) \prod_{p=1}^{2} (x_{p\,5} + x_{i\,5} + 2)}}, \tag{3.60b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5(-i) \\ 0 & \hat{\Gamma}_4(-i) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \hat{\Gamma}_4(-i) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_{p \neq i}^{2} (x_{i\,5} - x_{p\,5})}{x_{i\,5} \prod_{p \neq i}^{2} (x_{i\,5} - x_{p\,5} - 1)}}. \tag{3.60c}$$

由 (3.60) 出发, 利用 (3.55) 递推, 用数学归纳法可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle = \frac{\prod_{p=1}^{2} x_{p\,4}}{\sqrt{\prod_{p=1}^{2} x_{p\,5} (x_{p\,5} + 1)}}, \tag{3.61a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5(i) \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\prod_{p=1}^{2}(x_{i\,5} - x_{p\,4} + 1)(x_{i\,5} + x_{p\,4} + 1)}{(x_{i\,5}+1)(2x_{i\,5}+3)\prod_{p\neq i}^{2}(x_{i\,5} - x_{p\,5} + 1)(x_{i\,5} + x_{p\,5} + 2)}}, \tag{3.61b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5(-i) \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{\prod_{p=1}^{2}(x_{i\,5} - x_{p\,4})(x_{i\,5} + x_{p\,4})}{x_{i\,5}(2x_{i\,5}-1)\prod_{p\neq i}^{2}(x_{i\,5} - x_{p\,5} - 1)(x_{i\,5} + x_{p\,5})}}. \tag{3.61c}$$

式 (3.61) 和 (3.59) 给出全部 $o(5,R)$ 的约化标量因子，并具有下列对称性，

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5' \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle &= \sqrt{\frac{d(\Gamma_5')}{d(\Gamma_5)}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5' \\ 0 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle, \\ \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5 \\ 1 & \Gamma_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5' \\ \Gamma_4' \end{matrix} \right\rangle &= \sqrt{\frac{d(\Gamma_5')d(\Gamma_4)}{d(\Gamma_5)d(\Gamma_4')}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_5' \\ 1 & \Gamma_4' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_5 \\ \Gamma_4 \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.62}$$

3.4 $o(2p,R)$ 的表示

本节和下节将采用张量基，用数学归纳法求李代数 $o(n,R)$ 的不可约表示. 本节将先讨论 $o(2p,R)$ 的不可约表示，下节将讨论 $o(2p+1,R)$ 的不可约表示. 综合本节和下节结果，就得到李代数 $o(n,R)$ 的不可约表示.

$o(n,R)$ 除含 $o(n-1,R)$ 的元素外，还含 $o(n-1,R)$ 的 (1) 秩不可约张量 $T^{(n-1)}(\beta_i)$. $T^{(n-1)}(\beta_i)$ 的取法如表 3.2. $T^{(n-1)}(\beta_i)$ 是 $o(n-1,R)$ 的秩为 (1) 不可约张量的证明，可以仿照 $T^{(3)}(\beta_i)$ 是 $o(3,R)$ 的 (1) 秩不可约张量和 $T^{(4)}(\beta_i)$ 是 $o(4,R)$ 的 (1) 秩不可约张量的证明而得到. 此处不再赘述.

表 3.2　$o(n,R)$ 的张量基 $T^{(n-1)}(\beta_i)$

β_i	$n=4k$	$n=4k+1$
β_{n-1}	$\mathrm{i}I_{n\ n-1}$	$\mathrm{i}I_{n\ n-1}$
β_{n-2}	$I_{n\ n-2}$	$I_{n\ n-2}$
β_{n-3}	$-\mathrm{i}I_{n\ n-3}$	$-\mathrm{i}I_{n\ n-3}$
β_{n-4}	$-I_{n\ n-4}$	$-I_{n\ n-4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
β_3	$\mathrm{i}I_{n\,3}$	$I_{n\,3}$
β_{+1}	$\sqrt{1/2}(I_{n\,2}-\mathrm{i}I_{n\,1})$	$-\mathrm{i}\sqrt{1/2}(I_{n\,2}-\mathrm{i}I_{n\,1})$
β_{-1}	$\sqrt{1/2}(I_{n\,2}+\mathrm{i}I_{n\,1})$	$-\mathrm{i}\sqrt{1/2}(I_{n\,2}+\mathrm{i}I_{n\,1})$

β_i	$n=4k+2$	$n=4k+3$
β_{n-1}	$\mathrm{i}I_{n\ n-1}$	$\mathrm{i}I_{n\ n-1}$
β_{n-2}	$I_{n\ n-2}$	$I_{n\ n-2}$
β_{n-3}	$-\mathrm{i}I_{n\ n-3}$	$-\mathrm{i}I_{n\ n-3}$
β_{n-4}	$-I_{n\ n-4}$	$-I_{n\ n-4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
β_3	$-\mathrm{i}I_{n\,3}$	$-I_{n\,3}$
β_{+1}	$-\sqrt{1/2}(I_{n\,2}-\mathrm{i}I_{n\,1})$	$\mathrm{i}\sqrt{1/2}(I_{n\,2}-\mathrm{i}I_{n\,1})$
β_{-1}	$-\sqrt{1/2}(I_{n\,2}+\mathrm{i}I_{n\,1})$	$\mathrm{i}\sqrt{1/2}(I_{n\,2}+\mathrm{i}I_{n\,1})$

按 (3.2) 取 $o(2p,R)$ 的 Cartan 子代数为 $H_j=\mathrm{i}I_{2j\ 2j-1}$，$j=1,\cdots,p$, 则其有限维不可约厄米表示为 $\Gamma_{2p}=(m_{1\,2p},\cdots,m_{p\,2p})$, 用 $o(2p,R)\supset o(2p-1,R)\supset\cdots\supset o(2,R)$ 来标记 Γ_{2p} 表示空间的态，因为上述每步都是简单约化，所以这标记是正交完备的. 用 $\Gamma_{2p-1},\cdots,\Gamma_2$ 标记 $o(2p-1,R),\cdots,o(2,R)$ 的不可约表示，则 Γ_{2p} 包含满足下式的 $\Gamma_{2p-1},\Gamma_{2p-2}$,

$$
\begin{aligned}
&m_{1\,2p}\geq m_{1\,2p-1}\geq m_{2\,2p}\geq m_{2\,2p-1}\geq\cdots\\
&\geq m_{p-1\,2p}\geq m_{p-1\,2p-1}\geq|m_{p\,2p}|,
\end{aligned}
\tag{3.63a}
$$

$$m_{1\,2p-1} \geq m_{1\,2p-2} \geq m_{2\,2p-1} \geq m_{2\,2p-2} \geq \cdots$$
$$\geq m_{p-1\,2p-1} \geq m_{p-1\,2p-2} \geq -m_{p-1\,2p-1}, \tag{3.63b}$$

等等各一次.

所以 Γ_{2p} 表示空间的正交完备归一基可以取为

$$\left| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \\ \gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} m_{1\,2p} \quad m_{2\,2p} \quad \cdots \quad m_{p\,2p} \\ m_{1\,2p-1} \quad \cdots \quad m_{p-1\,2p-1} \\ \vdots \\ m_{1\,2} \end{matrix} \right\rangle,$$

其中 γ_{2p-1} 是不可约表示 Γ_{2p-1} 全体分量指标 $\Gamma_{2p-2}, \cdots, \Gamma_2$ 的简写. 记 $\hat{\Gamma}_{2p-1} = (m_{1\,2p}, m_{2\,2p}, \cdots, m_{p-1,2p})$, $\hat{\Gamma}_{2p-2} = (m_{1\,2p-1}, m_{2\,2p-1}, \cdots, m_{p-1,2p-1})$, $\cdots, \hat{\Gamma}_2 = (m_{1\,3})$, 对固定的 Γ_{2p}, Γ_{2p-1} 的最高值为 $\hat{\Gamma}_{2p-1}$, 对固定的 Γ_{2p-1}, Γ_{2p-2} 的最高值为 $\hat{\Gamma}_{2p-2}, \cdots$, 对固定的 Γ_3, Γ_2 的最高值为 $\hat{\Gamma}_2$. Γ_{2p} 的最高权态为

$$\left| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\gamma}_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \\ \vdots \\ \hat{\Gamma}_2 \end{matrix} \right\rangle.$$

为标记方便, 取 $x_{i\,2p} = m_{i\,2p} + p - i$, $x_{i\,2p-1} = m_{i\,2p-1} + p - i - 1$, $x_{i\,2p-2} = m_{i\,2p-2} + p - i - 1$, 等等. 设 $o(2p-1, R)$ 的表示矩阵已知, 特别是 $T^{(2p-2)}(\beta_i)$ 的约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2}(-i) \end{matrix} \right\| T^{(2p-2)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\,2p-1} + x_{i\,2p-2})(x_{k\,2p-1} - x_{i\,2p-2} + 1)}{2\prod_{k \neq i}^{p-1}(x_{k\,2p-2} + x_{i\,2p-2} - 1)(x_{k\,2p-2} - x_{i\,2p-2} + 1)}}. \tag{3.64}$$

设 $o(2p-1,R)$ 的约化标量因子如下：

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1} \\ 0 & \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} x_{k\ 2p-2}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{p-1} x_{k\ 2p-1}(x_{k\ 2p-1}+1)}}, \tag{3.65a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1}(i) \\ 0 & \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{(x_{i\ 2p-1}+1)(2x_{i\ 2p-1}+3)}} \times \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{p-1}(x_{i\ 2p-1}-x_{k\ 2p-2}+1)(x_{i\ 2p-1}+x_{k\ 2p-1}+1)}{\prod_{p\neq i}^{p-1}(x_{i\ 2p-1}-x_{k\ 2p-1}+1)(x_{i\ 2p-1}+x_{k\ 2p-1}+2)}}, \tag{3.65b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1}(-i) \\ 0 & \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{x_{i\ 2p-1}(2x_{i\ 2p-1}-1)}} \times \sqrt{\frac{\prod_{k=2}^{p-1}(x_{i\ 2p-1}-x_{k\ 2p-2})(x_{i\ 2p-1}+x_{k\ 2p-2})}{\prod_{k\neq i}^{p-1}(x_{i\ 2p-1}-x_{k\ 2p-1}-1)(x_{i\ 2p-1}+x_{k\ 2p-1})}}. \tag{3.65c}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1}(i) \\ 1 & \Gamma_{2p-2}(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{x_{i\ 2p-1}\mp x_{k\ 2p-2}+1} \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p-1}(i) \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \middle\| T^{(2p-2)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1}(i) \\ \Gamma_{2p-2}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1}(i) \\ 0 & \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.66a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1}(-i) \\ 1 & \Gamma_{2p-2}(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{x_{i\ 2p-1}\pm x_{k\ 2p-2}} \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p-1}(-i) \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \middle\| T^{(2p-2)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1}(-i) \\ \Gamma_{2p-2}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1}(-i) \\ 0 & \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.66b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p-1} \\ 1 & \Gamma_{2p-2}(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p-1} \\ \Gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle = \pm\frac{1}{x_{k\ 2p-2}}$$

$$\times\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\middle\| T^{(2p-2)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}(\pm k)\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p-1}\\ 0 & \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle. \tag{3.66c}$$

约化矩阵元和约化标量因子满足下列对称性

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\middle\| T^{(2p-2)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma'_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle\\&=\sqrt{\frac{d(\Gamma'_{2p-2})}{d(\Gamma_{2p-2})}}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma'_{2p-2}\end{matrix}\middle\| T^{(2p-2)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p-1}\\ 0 & \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma'_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle\\&=\sqrt{\frac{d(\Gamma'_{2p-1})}{d(\Gamma_{2p-1})}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma'_{2p-1}\\ 0 & \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle,\\&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p-1}\\ 1 & \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma'_{2p-1}\\ \Gamma'_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle\\&=\sqrt{\frac{d(\Gamma'_{2p-1})d(\Gamma_{2p-2})}{d(\Gamma_{2p-1})d(\Gamma'_{2p-2})}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma'_{2p-1}\\ 1 & \Gamma'_{2p-2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.68}$$

显然 $o(5,R)$ 的约化矩阵元和约化标量因子满足以上假设.

$o(2p,R)$ 包含 $o(2p-1,R)$, 所以其生成元除 $o(2p-1,R)$ 生成元外，还有生成元 $\mathrm{i}I_{2p\,2p-1},\mathrm{i}I_{2p\,2p-2},\cdots,\mathrm{i}I_{2p\,1}$. 可把它们按表 3.2 写成张量基 $T^{(2p-1)}(\beta_i)$, 它们构成 $o(2p-1,R)$ 的 (1) 秩不可约张量. $T^{(2p-1)}(\beta_{2p-1})$, 对应 $\Gamma_{2p-2}=0$ 的分量， $T^{(2p-1)}(\beta_{2p-2})$ 对应 $\Gamma_{2p-2}=1,\Gamma_{2p-3}=0$ 的分量，依此类推 $T^{(2p-1)}(\beta_{-1})$ 对应 $\Gamma_3=1,\Gamma_2=-1$ 的分量. 由于 $o(2p-1,R)$ 生成元的表示矩阵和约化系数是已知的. 所以求 $o(2p,R)$ 的表示, 只须求张量基 $T^{(2p-1)}(\beta_i)$ 的表示矩阵. 由 Wigner-Eckart 定理和已知的 $o(2p-1,R)$ CG 系数，求 $T^{(2p-1)}(\beta_i)$ 的表示矩阵问题，就变成求它们的约化矩阵元问题. 定义约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} \end{array} \middle| T^{(2p-1)}(\beta_i) \middle| \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \\ \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{cc} 1 & \Gamma_{2p-1} \\ \beta_i & \gamma_{2p-1} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma'_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} \end{array} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle. \tag{3.69}$$

从表 3.2 知不可约张量 $T^{(2p-1)}(\beta_i)$ 的厄米共轭为

$$\begin{aligned} &T^{(2p-1)}(\beta_i)^\dagger = T^{(2p-1)}(\beta_i), \quad i = 2p-1, 2p-3, \cdots, 3, \\ &T^{(2p-1)}(\beta_i)^\dagger = -T^{(2p-1)}(\beta_i), \quad i = 2p-2, 2p-4, \cdots, 4, \\ &T^{(2p-1)}(\beta_{\pm 1})^\dagger = -T^{(2p-1)}(\beta_{\mp 1}). \end{aligned} \tag{3.70}$$

由厄米共轭条件和 $o(2p-1, R)$ 约化系数对称性 (3.68), 取相因子使约化矩阵元为实, 可得约化矩阵元满足的对称性

$$\left\langle \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} \end{array} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{d(\Gamma_{2p-1})}{d(\Gamma'_{2p-1})}} \left\langle \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{array} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} \end{array} \right\rangle. \tag{3.71}$$

考虑不可约张量间对易关系

$$[T^{(2p-1)}(\beta_{2p-1}), T^{(2p-1)}(\beta_{2p-2})] = -T^{(2p-2)}(\beta_{2p-2}). \tag{3.72}$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \\ \hat{\Gamma}_{2p-2} \\ \gamma_{2p-2} \end{array} \right|$ 和 $\left| \begin{array}{l} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(-i) \\ \hat{\Gamma}_{2p-2}(-i) \\ \gamma_{2p-2} \end{array} \right\rangle$ 作用于 (3.72),

代入 $o(2p-1,R)$ 的约化系数和约化矩阵元对称性，可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(-i) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{x_{i\ 2p-1}+1}{x_{i\ 2p-1}-1}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.73}$$

这齐次方程本身就是一个递推关系.

从左和右分别以 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \\ \hat{\Gamma}_{2p-2} \\ \gamma_{2p-2} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \\ \hat{\Gamma}_{2p-2}(-i) \\ \gamma_{2p-2} \end{matrix} \right\rangle$ 作用于 (3.72), 可得约化矩阵元满足的非齐次方程

$$\begin{aligned} &\frac{\prod_{k=1}^{p-1} x_{k\ 2p-1}}{x_{i\ 2p-1}^2 \prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\ 2p-1}+1)} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &+\frac{(2x_{i\ 2p-1}-1)\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\ 2p-1}+x_{i\ 2p-1})}{2x_{i\ 2p-1}^2\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\ 2p-1}+x_{i\ 2p-1}+1)} \\ &\quad\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &-\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(2x_{k\ 2p-1}+3)\prod_{j\neq i}^{p-1}(x_{j\ 2p-1}-x_{k\ 2p-1}-1)}{(x_{k\ 2p-1}+1)(x_{i\ 2p-1}+x_{k\ 2p-1}+1)\prod_{j\neq k}^{p-1}(x_{j\ 2p-1}-x_{k\ 2p-1})} \\ &\quad\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(k) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2 = 1. \end{aligned} \tag{3.74}$$

已知最高权态为 Cartan 子代数本征态，有

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\gamma}_{2p} \end{matrix} \middle| T^{(2p-1)}(\beta_{2p-1}) \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\gamma}_{2p} \end{matrix} \right\rangle = x_{p\ 2p}.$$

将约化系数 (3.65) 代入约化矩阵元定义 (3.69), 可以解出最高权态的约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle = \frac{\prod_{k=1}^{p} x_{k\,2p}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sqrt{x_{k\,2p}(x_{k\,2p}-1)}}.$$

用数学归纳法从递推关系 (3.73) 可得约化矩阵元

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle = \frac{\prod_{k=1}^{p} x_{k\,2p}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sqrt{x_{k\,2p-1}(x_{k\,2p-1}+1)}}. \tag{3.75a}$$

将此代入非齐次方程 (3.74), 并利用约化矩阵元对称性, 可得递推关系

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &= \frac{2x_{i2p-1}^2 \prod_{k=1}^{p-1}(x_{k2p-1}+x_{i2p-1}+1)}{(2x_{i2p-1}-1)\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k2p-1}+x_{i2p-1})} \left[1-\frac{\prod_{k=1}^{p} x_{k2p}^2}{x_{i2p-1}^2 \prod_{k=1}^{p-1}(x_{k2p-1}+1)^2}\right. \\ &\quad +\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(2x_{k2p-1}+3)\prod_{j\neq i}^{p-1}(x_{j2p-1}-x_{k2p-1}-1)}{(x_{k2p-1}+1)(x_{i2p-1}+x_{k2p-1}+1)\prod_{j\neq k}^{p-1}(x_{j2p-1}-x_{k2p-1})} \\ &\quad \left.\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(k) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2\right]. \end{aligned} \tag{3.76}$$

对最高权态有

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \\ &= \frac{2(x_{i\,2p}+x_{p\,2p}-1)(x_{i\,2p}-x_{k\,2p}-1)\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\,2p}+x_{i\,2p}-1)}{(2x_{i\,2p}-3)\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\,2p}+x_{i\,2p}-2)}. \end{aligned}$$

由此出发, 取相因子使约化矩阵元为正, 利用约化矩阵元对称性,

用数学归纳法从递推关系 (3.76) 可得约化矩阵元

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{x_{i\,2p-1}(2x_{i\,2p-1}-1)}} \times \sqrt{\frac{-\prod_{k=1}^{p}(x_{k\,2p}-x_{i\,2p-1})(x_{k\,2p}+x_{i\,2p-1})}{\prod_{k\neq i}^{p-1}(x_{k\,2p-1}-x_{i\,2p-1}+1)(x_{k\,2p-1}+x_{i\,2p-1})}}. \tag{3.75b}$$

在证明式 (3.75b) 时，用到恒等式 (2.49). 再利用约化矩阵元对称性可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p-1)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{(x_{i\,2p-1}+1)(2x_{i\,2p-1}+3)}} \times \sqrt{\frac{-\prod_{k=1}^{p}(x_{k\,2p}-x_{i\,2p-1}-1)(x_{k\,2p}+x_{i\,2p-1})}{\prod_{k\neq i}^{p-1}(x_{k\,2p-1}-x_{i\,2p-1}-1)(x_{k\,2p-1}+x_{i\,2p-1}+2)}}. \tag{3.75c}$$

式 (3.75) 给出全部约化矩阵元结果.

显然按李代数链 $o(2p,R)\supset o(2p-1,R)\supset\cdots\supset o(2,R)$ 所选的基，除最高权态外，一般不是 Cartan 子代数的本征态. 所以此表示空间不是按权分解的.

以下讨论 $o(2p,R)$ 不可约表示的直积约化. 设 Γ'_{2p}，Γ''_{2p} 代表 $o(2p,R)$ 的两个不可约表示，它们的直积一般不是简单约化的，其直积约化为 $\Gamma'_{2p}\otimes\Gamma''_{2p}\simeq\oplus_{\Gamma_{2p}}m_{\Gamma_{2p}}\Gamma_{2p}$. $m_{\Gamma_{2p}}$ 是不可约表示 Γ_{2p} 的重复度. 取 $\left|\begin{matrix}\Gamma'_{2p}\\ \Gamma'_{2p-1}\\ \Gamma'_{2p-2}\\ \gamma'_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle$, $\left|\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma''_{2p-1}\\ \Gamma''_{2p-2}\\ \gamma''_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle$ 和 $\left|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\\ \gamma_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle$ 分别为表示 $\Gamma'_{2p},\Gamma''_{2p}$ 和 Γ_{2p} 的表示空间基. $o(2p,R)$ 的 CG 系数为

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} & \beta\,\Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \Gamma_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} & \gamma''_{2p-1} & \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} & \beta\,\Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \Gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \Gamma_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} & \gamma''_{2p-1} & \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle, \tag{3.77}$$

其中 $\left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \Gamma_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} & \gamma''_{2p-1} & \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$ 为已知的 $o(2p-1,R)$ 的 CG 系数，所以求 $o(2p,R)$ 的 CG 系数问题就变成求 $o(2p,R)$ 的约化标量因子 $\left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} & \beta\,\Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \Gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$ 的问题. $\beta=1,\cdots,m_{\Gamma_{2p}}$，是标记非简单约化的量子数.

从左和右分别以 $\left\langle \begin{array}{cc|} \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} & \gamma''_{2p-1} \end{array} \right.$ 和 $\left| \begin{array}{c} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \\ \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$ 乘不可约张量 $T^{2p-1}(\beta_{2p-1})$，可得约化标量因子满足的基本方程,

$$\sum_{\tilde{\Gamma}_{2p-1}} \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_{2p-1} & \tilde{\Gamma}_{2p-1} \\ 0 & \gamma_{2p-1} & \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \tilde{\Gamma}_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} & \gamma''_{2p-1} & \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_{2p} \\ \tilde{\Gamma}_{2p-1} \end{array} \right\| T^{(2p-1)} \left\| \begin{array}{c} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} & \beta\,\Gamma_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \tilde{\Gamma}_{2p-1} \end{array} \right\rangle$$

$$= \sum_{\tilde{\Gamma}'_{2p-1}} \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & \tilde{\Gamma}'_{2p-1} & \Gamma'_{2p-1} \\ 0 & \gamma'_{2p-1} & \gamma'_{2p-1} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \tilde{\Gamma}'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \Gamma_{2p-1} \\ \gamma'_{2p-1} & \gamma''_{2p-1} & \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{array}{c} \Gamma'_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} \end{array} \right\| T^{(2p-1)} \left\| \begin{array}{c} \Gamma'_{2p} \\ \tilde{\Gamma}'_{2p-1} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} & \beta\,\Gamma_{2p} \\ \tilde{\Gamma}'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1} & \Gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$$

$$+\sum_{\Gamma''^{\tilde{}}_{2p-1}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma''^{\tilde{}}_{2p-1}\\ 0 & \gamma''_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma''_{2p-1}\\ \gamma''_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_{2p-1} & \Gamma''^{\tilde{}}_{2p-1}\\ \gamma'_{2p-1} & \gamma''_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle$$

$$\times\left\langle\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma''_{2p-1}\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma''^{\tilde{}}_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p}\\ \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''^{\tilde{}}_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\beta\,\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle. \tag{3.78}$$

β 量子数说明方程 (3.78) 有 $m_{\Gamma_{2p}}$ 组线性无关的解.

以下求 $\Gamma'_{2p}=1$ 的约化标量因子. 此时直积无简并存在. 取 $\Gamma'_{2p-1}=0$, 由基本方程 (3.78), 代入已知的 $o(2p-1,R)$ CG 系数和 $o(2p,R)$ 约化矩阵元对称性, Γ_{2p-1} 分别取 $\Gamma''_{2p-1},\Gamma''_{2p-1}(\pm k)$ 时, 可得约化标量因子满足下列关系,

$$\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma''_{2p}\\ 1 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma''_{2p}\\ 0 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle$$

$$\times\left[\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1))}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle-\left\langle\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\right], \tag{3.79a}$$

$$\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma''_{2p}\\ 1 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(\pm i)\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(\pm i)\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma''_{2p}\\ 0 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle$$

$$-\left\langle\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(\pm i)\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma''_{2p}\\ 0 & \Gamma_{2p-1}(\pm i)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(\pm i)\end{matrix}\right\rangle. \tag{3.79b}$$

取 $\Gamma'_{2p-1}=1$, $\Gamma'_{2p-2}=0$, $\Gamma_{2p-1}=\Gamma''_{2p-1}(-k)$, 由基本方程 (3.78), 并代入式 (3.79), 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma''_{2p} & \Gamma_{2p}\\ 0 & \Gamma_{2p-1} & \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&\times\Bigg[\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_{2p-1} & \Gamma_{2p-1}\\ 0 & \Gamma_{2p-2} & \Gamma_{2p-2}\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&\times\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&-2\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_{2p-1} & \Gamma_{2p-1}\\ 0 & \Gamma_{2p-2} & \Gamma_{2p-2}\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&\times\left\langle\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&+\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_{2p-1}(-k) & \Gamma_{2p-1}(-k)\\ 0 & \Gamma_{2p-2} & \Gamma_{2p-2}\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&\times\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\rangle\Bigg]\\
=&\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma''_{2p} & \Gamma_{2p}\\ 0 & \Gamma_{2p-1}(-k) & \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\rangle\\
&\times\Bigg[2\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_{2p-1}(-k) & \Gamma_{2p-1}(-k)\\ 0 & \Gamma_{2p-2} & \Gamma_{2p-2}\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&\times\left\langle\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\rangle\\
&-\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_{2p-1}(-k) & \Gamma_{2p-1}(-k)\\ 0 & \Gamma_{2p-2} & \Gamma_{2p-2}\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{array}\right\rangle\\
&\times\left\langle\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\| T^{(2p-1)}\left\|\begin{array}{c}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{array}\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
-\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p-1}\\ 0 & \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p-1}\\ \Gamma_{2p-2}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle
$$

$$
\left.\times\left\langle\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma''_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\right]. \tag{3.80}
$$

将 $o(2p-1,R)$ 约化系数和 $o(2p,R)$ 约化矩阵元代入上式，可得从 Γ_{2p-1} 大递推到 Γ_{2p-1} 小的约化标量因子递推公式，

$$
\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}(\pm i)\\ 0 & \Gamma_{2p-1}(-k)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{matrix}\right\rangle
$$

$$
=\sqrt{\frac{(x_{i\,2p}\pm x_{k\,2p-1})(x_{i\,2p}\mp x_{k\,2p-1}\pm 1)}{(x_{i\,2p}\mp x_{k\,2p-1})(x_{i\,2p}\pm x_{k\,2p-1}\pm 1)}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}(\pm i)\\ 0 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle. \tag{3.81}
$$

用 (3.81) 将 (3.79) 化简得，

$$
\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}\\ 1 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle
$$

$$
=\pm\frac{1}{x_{i\,2p}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}\\ 0 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle
$$

$$
\times\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle, \tag{3.82a}
$$

$$
\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}\\ 1 & \Gamma_{2p-1}(k)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle=\frac{1}{\pm x_{i\,2p}+x_{k\,2p-1}+1}
$$

$$
\times\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}\\ 0 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}(k)\end{matrix}\right\rangle, \tag{3.82b}
$$

$$
\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}\\ 1 & \Gamma_{2p-1}(-k)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i)\\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle=\frac{1}{\pm x_{i\,2p}-x_{k\,2p-1}}
$$

$$\times\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p} \\ 0 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(\pm i) \\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle\|T^{(2p-1)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}(-k)\end{matrix}\right\rangle. \tag{3.82c}$$

递推关系 (3.81) 不能完全确定约化标量因子的数值. 约化标量因子的绝对值可以通过正交归一关系确定. 对最高权态 $\hat{\Gamma}_{2p-1}$, 通过满足正交归一条件,

$$\sum_{\Gamma'_{2p-1},\Gamma''_{2p-1}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma''_{2p} \\ \Gamma'_{2p-1} & \Gamma''_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle^2=1,$$

规定 $\Gamma'_{2p-1}=0$ 的约化标量因子相因子为正, 可以求得最高权态的约化标量因子为,

$$\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}(i) \\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{-(2x_{i\,2p}+1)\prod_{j=1}^{p-1}(x_{j\,2p}+x_{i\,2p})}{2(x_{p\,2p}-x_{i\,2p}-1)(x_{p\,2p}+x_{i\,2p}+1)\prod_{j=1}^{p-1}(x_{j\,2p}+x_{i\,2p}+1)}}, \tag{3.83a}$$

$$\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}(-i) \\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p-1}(-i)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1}(-i)\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{-(x_{i\,2p}-1)\prod_{j\neq i}^{p-1}(x_{j\,2p}-x_{i\,2p})}{(x_{p\,2p}-x_{i\,2p}+1)(x_{p\,2p}+x_{i\,2p}-1)\prod_{j\neq i}^{p-1}(x_{j\,2p}-x_{i\,2p}+1)}}. \tag{3.83b}$$

由 (3.83) 出发, 利用 (3.81) 递推, 在证明中用到恒等式 (2.49), 用数学归纳法可得

$$\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}(i) \\ 0 & \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{p-1}(x_{i\,2p}-x_{j\,2p-1})(x_{i\,2p}+x_{j\,2p-1}+1)}{2\prod_{j\neq i}^{p}(x_{i\,2p}-x_{j\,2p}+1)(x_{i\,2p}+x_{j\,2p}+1)}}, \tag{3.84a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p}(-i) \\ 0 & \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{p-1}(x_{i\,2p} - x_{j\,2p-1} - 1)(x_{i\,2p} + x_{j\,2p-1})}{2\prod_{j\neq i}^{p}(x_{i\,2p} - x_{j\,2p} - 1)(x_{i\,2p} + x_{j\,2p} - 1)}}. \tag{3.84b}$$

(3.84) 和 (3.82) 给出全部 $o(2p,R)$ 的约化标量因子. 并具有下列对称性,

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p} \\ 0 & \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p}(\pm i) \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma_{2p}(\pm i))}{\mathrm{d}(\Gamma_{2p})}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p}(\pm i) \\ 0 & \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle, \\ &\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p} \\ 1 & \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p}(\pm i) \\ \Gamma'_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma_{2p}(\pm i))\mathrm{d}(\Gamma_{2p-1})}{\mathrm{d}(\Gamma_{2p})\mathrm{d}(\Gamma'_{2p-1})}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p}(\pm i) \\ 1 & \Gamma'_{2p-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.85}$$

3.5 $o(2p+1,R)$ 的表示

$o(2p+1,R)$ 的 Cartan 子代数为 $H_j = \mathrm{i}I_{2j\,2j-1}$, $j=1,\cdots,p$, 其有限维不可约厄米表示为 $\Gamma_{2p+1} = (m_{1\,2p+1},\cdots,m_{p\,2p+1})$, 用群链 $o(2p+1,R)\supset o(2p,R)\supset\cdots\supset o(2,R)$ 来标记 Γ_{2p+1} 表示空间的态, 因为上述每步都是简单约化, 所以这标记是正交完备的. 用 $\Gamma_{2p},\cdots,\Gamma_2$ 标记 $o(2p,R),\cdots,o(2,R)$ 的不可约表示, 则 Γ_{2p+1} 包含满足下式的 $\Gamma_{2p},\Gamma_{2p-1},\cdots,\Gamma_2$ 各一次,

$$\begin{aligned} m_{1\,2p+1} \geq m_{1\,2p} \geq m_{2\,2p+1} \geq m_{2\,2p} \geq \cdots \\ \geq m_{p\,2p+1} \geq m_{p\,2p} \geq -m_{p\,2p+1}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& m_{1\,2p} \geq m_{1\,2p-1} \geq m_{2\,2p} \geq m_{2\,2p-1} \geq \cdots \\
& \quad \geq m_{p-1\,2p} \geq m_{p-1\,2p-1} \geq |m_{p\,2p}|, \\
& \qquad \vdots \\
& m_{1\,3} \geq m_{1\,2} \geq -m_{1\,3}.
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

所以 Γ_{2p+1} 表示空间的正交完备归一基可以取为

$$
\left|\begin{array}{l} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \\ \Gamma_{2p-1} \\ \gamma_{2p-1} \end{array}\right\rangle = \left|\begin{array}{cccc} m_{1\,2p+1} & m_{2\,2p+1} & \cdots & m_{p\,2p+1} \\ m_{1\,2p} & m_{2\,2p} & \cdots & m_{p\,2p} \\ & m_{1\,2p-1} \quad \cdots & m_{p-1\,2p-1} & \\ & \gamma_{2p-1} & & \end{array}\right\rangle,
$$

其中 γ_{2p-1} 是不可约表示 Γ_{2p-1} 全体分量指标 $\Gamma_{2p-2},\cdots,\Gamma_2$ 的简写. 记 $\hat{\Gamma}_{2p} = (m_{1\,2p+1}, m_{2\,2p+1}, \cdots, m_{p,2p+1})$, 对固定的 Γ_{2p+1}, Γ_{2p} 的最高值为 $\hat{\Gamma}_{2p}$, Γ_{2p+1} 的最高权态为

$$
\left|\begin{array}{l} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\gamma}_{2p+1} \end{array}\right\rangle = \left|\begin{array}{l} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\Gamma}_{2p} \\ \vdots \\ \hat{\Gamma}_2 \end{array}\right\rangle.
$$

设 $o(2p,R)$ 的表示矩阵已知, 特别是 $T^{(2p-1)}(\beta_i)$ 的约化矩阵元由 (3.75) 式给出. $o(2p,R)$ 的约化系数由 (3.82),(3.84) 式给出. $o(2p,R)$ 的约化矩阵元和约化系数满足对称性 (3.85).

$o(2p+1,R)$ 包含 $o(2p,R)$, 所以其生成元除 $o(2p,R)$ 生成元外, 还有生成元 $\mathrm{i}I_{2p+1\,2p}, \mathrm{i}I_{2p+1\,2p-1}, \cdots, \mathrm{i}I_{2p+1\,1}$. 可把它们按表 3.2 写成张量基 $T^{(2p)}(\beta_i)$, 它们构成 $o(2p,R)$ 的 (1) 秩不可约张量. $T^{(2p)}(\beta_{2p})$ 对应 $\Gamma_{2p-1}=0$ 的分量, $T^{(2p)}(\beta_{2p-1})$ 对应 $\Gamma_{2p-1}=1, \Gamma_{2p-2}=0$ 的分量, 依此类推 $T^{(2p)}(\beta_{-1})$ 对应 $\Gamma_3=1, \Gamma_2=-1$ 的分量. 由于 $o(2p,R)$ 生成元的表示矩阵和约化系数是已知的. 所

以求 $o(2p+1,R)$ 的表示，只须求张量基 $T^{(2p)}(\beta_i)$ 的表示矩阵. 由 Wigner-Eckart 定理和已知的 $o(2p,R)$ CG 系数，求 $T^{(2p)}(\beta_i)$ 的表示矩阵问题，就变成求它们的约化矩阵元问题. 定义约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} \\ \gamma'_{2p} \end{array} \middle| T^{(2p)}(\beta_i) \middle| \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \\ \gamma_{2p} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc} 1 & \Gamma_{2p} \\ \beta_i & \gamma_{2p} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \Gamma'_{2p} \\ \gamma'_{2p} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} \end{array} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{array} \right\rangle. \tag{3.87}$$

从定义知不可约张量 $T^{(2p)}(\beta_i)$ 的厄米共轭为

$$\begin{aligned} &T^{(2p)}(\beta_i)^\dagger = T^{(2p)}(\beta_i), \quad i = 2p, 2p-2, \cdots, 4, \\ &T^{(2p)}(\beta_i)^\dagger = -T^{(2p)}(\beta_i), \quad i = 2p-2, 2p-4, \cdots, 3, \\ &T^{(2p)}(\beta_{\pm 1})^\dagger = T^{(2p)}(\beta_{\mp 1}). \end{aligned} \tag{3.88}$$

由厄米共轭条件和 $o(2p,R)$ 约化系数对称性 (3.85), 取相因子使约化矩阵元为实数，可得约化矩阵元满足的对称性,

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} \end{array} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma_{2p})}{\mathrm{d}(\Gamma'_{2p})}} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{array} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} \end{array} \right\rangle. \tag{3.89}$$

考虑不可约张量间对易关系,

$$[T^{(2p)}(\beta_{2p}), T^{(2p)}(\beta_{2p-1})] = -T^{(2p-1)}(\beta_{2p-1}). \tag{3.90}$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \\ \gamma_{2p-1} \end{array} \right|$ 和 $\left| \begin{array}{c} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \\ \gamma_{2p-1} \end{array} \right\rangle$ 作用于式 (3.90),

代入 $o(2p-1,R)$ 的约化系数和约化矩阵元对称性，可得约化矩阵

元满足的非齐次方程

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{2}{x_{k\,2p}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}\\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(-k)\\ \hat{\Gamma}_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle^{2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(-k)\end{matrix}\middle\|T^{(2p)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle^{2}$$
$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{2}{x_{k2p}}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p}\\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p-1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p}(k)\\ \hat{\Gamma}_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle^{2}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(k)\end{matrix}\middle\|T^{(2p)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle^{2}$$
$$=\frac{\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\,2p}+x_{p\,2p}-1)}{x_{p\,2p}\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k\,2p}+x_{p\,2p})}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(-p)\end{matrix}\middle\|T^{(2p)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle^{2}$$
$$+2\sum_{k=1}^{p}\frac{\prod_{j\neq k}^{p-1}(x_{j2p}-x_{k2p}-1)}{(x_{k2p}+x_{p2p})\prod_{j\neq k}^{p}(x_{j2p}-x_{k2p})}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(k)\end{matrix}\middle\|T^{(2p)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle^{2}$$
$$=1. \tag{3.91}$$

从左和右分别以 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\\ \hat{\Gamma}_{2p-1}\\ \gamma_{2p-1}\end{matrix}\right|$ 和 $\left|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\\ \hat{\Gamma}_{2p-1}(-i)\\ \gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle$ 作用于式 (3.90), 代入 $o(2p-1,R)$ 的约化系数和约化矩阵元对称性，可得约化矩阵元满足的另一非齐次方程

$$\frac{-(x_{k2p}-1)\prod_{k\neq i}^{p-1}(x_{k2p}+x_{p2p}-1)}{(x_{i2p}-x_{p2p})\prod_{k=1}^{p-1}(x_{k2p}+x_{p2p})}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(-p)\end{matrix}\middle\|T^{(2p)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle^{2}$$
$$+\frac{(x_{i2p-1}-1)\prod_{k\neq i}^{p-1}(x_{k2p}+x_{i2p}-1)}{(x_{i2p}-x_{p2p})\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k2p}+x_{i2p})}\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(-i)\end{matrix}\middle\|T^{(2p)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle^{2}$$
$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{2x_{k\,2p}(x_{k\,2p}+1)\prod_{j\neq i,k}^{p-1}(x_{j\,2p}-x_{k\,2p}-1)}{(x_{k\,2p}+x_{i\,2p})(x_{k\,2p}+x_{p\,2p})\prod_{j\neq k}^{p}(x_{j\,2p}-x_{k\,2p})}$$
$$\times\left\langle\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(k)\end{matrix}\middle\|T^{(2p)}\middle\|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle^{2}=1. \tag{3.92}$$

由上二非齐次方程可以解出约化矩阵元递推关系,

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{x_{i\ 2p} \prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\ 2p} + x_{i\ 2p})}{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\ 2p} + x_{i\ 2p} - 1)}$$
$$\times \left[1 - 2\sum_{k=1}^{p} \frac{\prod_{j\neq k}^{p}(x_{j\ 2p} - x_{k\ 2p} - 1)}{(x_{i\ 2p} + x_{k\ 2p})(x_{i\ 2p} - x_{k\ 2p} - 1)\prod_{j\neq k}^{p}(x_{j\ 2p} - x_{k\ 2p})} \right.$$
$$\left. \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(k) \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle^2 \right]. \tag{3.93}$$

对最高权态有,

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\Gamma}_{2p}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\Gamma}_{2p} \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{x_{i\ 2p+1} \prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\ 2p+1} + x_{i\ 2p+1})}{\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\ 2p+1} + x_{i\ 2p+1} - 1)}.$$

由此出发,取约化矩阵元相因子为正,用数学归纳法从递推关系 (3.93) 可得约化矩阵元

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{p}(x_{k\ 2p+1} + x_{i\ 2p})(x_{k\ 2p+1} - x_{i\ 2p} + 1)}{2\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\ 2p} + x_{i\ 2p} - 1)(x_{k\ 2p} - x_{i\ 2p} + 1)}}. \tag{3.94a}$$

在证明式 (3.94a) 时,用到恒等式 (3.49). 再利用约化矩阵元对称性可得

$$\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(i) \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{p}(x_{k\ 2p+1} - x_{i\ 2p})(x_{k\ 2p+1} + x_{i\ 2p} + 1)}{2\prod_{k\neq i}^{p}(x_{k\ 2p} + x_{i\ 2p} + 1)(x_{k\ 2p} - x_{i\ 2p} - 1)}}. \tag{3.94b}$$

式 (3.94) 给出全部约化矩阵元结果.

显然按李代数链 $o(2p+1,R)\supset o(2p,R)\supset\cdots\supset o(2,R)$ 所选的基，除最高权态外，一般不是 Cartan 子代数的本征态. 所以此表示空间不是按权分解的.

以下讨论 $o(2p+1,R)$ 不可约表示的直积约化. 设 $\Gamma'_{2p+1},\Gamma''_{2p+1}$ 是 $o(2p+1,R)$ 的两个不可约表示，它们的直积约化为 $\Gamma'_{2p+1}\otimes\Gamma''_{2p+1}\simeq\oplus_{\Gamma_{2p+1}}m_{\Gamma_{2p+1}}\Gamma_{2p+1}$. 此直积一般不是简单约化的，$m_{\Gamma_{2p+1}}$ 是不可约表示 Γ_{2p+1} 的重复度. 取 $\Gamma'_{2p+1},\Gamma''_{2p+1},\Gamma_{2p+1}$ 表示空间的基分别为

$$\left|\begin{matrix}\Gamma'_{2p+1}\\ \Gamma'_{2p}\\ \Gamma'_{2p-1}\\ \gamma'_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle,\quad\left|\begin{matrix}\Gamma''_{2p+1}\\ \Gamma''_{2p}\\ \Gamma''_{2p-1}\\ \gamma''_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle,\quad\left|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\\ \Gamma_{2p-1}\\ \gamma_{2p-1}\end{matrix}\right\rangle.$$

$o(2p+1,R)$ 的 CG 系数为

$$\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_{2p+1} & \Gamma''_{2p+1}\\ \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p}\\ \gamma'_{2p} & \gamma''_{2p}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\beta\,\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\\ \gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle
=\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_{2p+1} & \Gamma''_{2p+1}\\ \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\beta\,\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p}\\ \gamma'_{2p} & \gamma''_{2p}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle,\tag{3.95}$$

其中 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p}\\ \gamma'_{2p} & \gamma''_{2p}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\Gamma_{2p}\\ \gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle$ 为已知的 $o(2p,R)$ 的 CG 系数，所以求 $o(2p+1,R)$ 的 CG 系数问题就变成求 $o(2p+1,R)$ 的约化标量因子 $\left\langle\begin{matrix}\Gamma'_{2p+1} & \Gamma''_{2p+1}\\ \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\beta\,\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle$ 的问题. $\beta=1,\cdots,m_{\Gamma_{2p+1}}$，是标记非简单约化的量子数.

分别以 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{2p+1} & \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} \\ \gamma'_{2p} & \gamma''_{2p} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \\ \gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle$ 乘在 $T^{(2p)}(\beta_{2p})$ 的左边和右边，可得约化标量因子满足的基本方程

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{\Gamma}_{2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p} \\ 0 & \gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \tilde{\Gamma}_{2p} \\ \gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} \\ \gamma'_{2p} & \gamma''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \tilde{\Gamma}_{2p} \\ \gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \tilde{\Gamma}_{2p} \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{2p+1} & \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{2p+1} \\ \tilde{\Gamma}_{2p} \end{matrix} \right\rangle \\
&= \sum_{\tilde{\Gamma}'_{2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \tilde{\Gamma}'_{2p} \\ 0 & \gamma'_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_{2p} \\ \gamma'_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \tilde{\Gamma}'_{2p} & \Gamma''_{2p} \\ \gamma'_{2p} & \gamma''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma'_{2p+1} \\ \tilde{\Gamma}'_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{2p+1} & \Gamma''_{2p+1} \\ \tilde{\Gamma}'_{2p} & \Gamma''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad + \sum_{\tilde{\Gamma}''_{2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \tilde{\Gamma}''_{2p} \\ 0 & \gamma''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma''_{2p} \\ \gamma''_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{2p} & \tilde{\Gamma}''_{2p} \\ \gamma'_{2p} & \gamma''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p} \\ \gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma''_{2p} \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \tilde{\Gamma}''_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma'_{2p+1} & \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} & \tilde{\Gamma}''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.96}$$

β 说明方程 (3.96) 有 $m_{\Gamma_{2p+1}}$ 组线性无关解.

当 $\Gamma'_{2p+1} = 1$ 时，直积无简并存在. 以下求 $\Gamma'_{2p+1} = 1$ 的约化标量因子. 取 $\Gamma'_{2p} = 0$, 自然有 $\gamma''_{2p} = \gamma_{2p}$. 取 $\Gamma_{2p} = \Gamma''_{2p}(\pm i)$, 由基本方程 (3.96), 代入已知的 $o(2p, R)$ 约化系数和 $o(2p+1, R)$ 约化矩阵元对称性，可得约化标量因子满足下列关系，

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma''_{2p+1} \\ 1 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm i) \end{matrix} \right\rangle$$

$$
= \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm i) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma''_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
- \left\langle \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm i) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma''_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(\pm i) \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm i) \end{matrix} \right\rangle . \tag{3.97}
$$

取 $\Gamma'_{2p} = 1$, $\Gamma'_{2p-2} = 0$, $\Gamma''_{2p} = \Gamma_{2p}(\pm k^2)$ 由基本方程 (3.96), 并代入式 (3.97), 可得

$$
\left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k^2) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma''_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= 2 \left\langle \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k^2) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma''_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
- \left\langle \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k^2) \end{matrix} \right\| T^{(2p)} \left\| \begin{matrix} \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma''_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(\pm k^2) \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k^2) \end{matrix} \right\rangle . \tag{3.98}
$$

将 $o(2p+1,R)$ 约化矩阵元代入 (3.97) 和 (3.98) 式，可得约化标量因子的递推关系

$$
\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(i) \\ 0 & \Gamma_{2p}(-k) \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-k) \end{matrix} \right\rangle
$$

$$
= \sqrt{\frac{(x_{i\,2p+1} - x_{k\,2p} + 2)(x_{i\,2p+1} + x_{k\,2p})}{(x_{i\,2p+1} - x_{k\,2p} + 1)(x_{i\,2p+1} + x_{k\,2p} + 1)}}
$$

$$
\times \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(i) \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle , \tag{3.99a}
$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}(-i)\\ 0 & \Gamma_{2p}(-k)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(-k)\end{matrix}\right\rangle\\&=\sqrt{\frac{(x_{i\ 2p+1}-x_{k\ 2p}+1)(x_{i\ 2p+1}+x_{k\ 2p}-1)}{(x_{i\ 2p+1}-x_{k\ 2p})(x_{i\ 2p+1}+x_{k\ 2p})}}\\&\quad\times\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}(-i)\\ 0 & \Gamma_{2p}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle,\end{aligned}\tag{3.99b}$$

取 $\Gamma'_{2p}=1$, $\Gamma'_{2p-1}=0$, $\Gamma_{2p}=\Gamma''_{2p}(k+j)$ 和 $\Gamma_{2p}=\Gamma''_{2p}(k-j)$, 由基本方程 (3.96) 得,

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}(k-j)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(k-j)\end{matrix}\right\rangle\\&=\frac{(x_{k\ 2p}-x_{j\ 2p}+1)}{(x_{k\ 2p}-x_{j\ 2p})}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}(-j)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(-j)\end{matrix}\right\rangle\\&\quad+\frac{(x_{k\ 2p}-x_{j\ 2p}+1)}{(x_{k\ 2p}-x_{j\ 2p})}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}(k)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(k)\end{matrix}\right\rangle\\&\quad-\frac{(x_{k\ 2p}-x_{j\ 2p}+2)}{(x_{k\ 2p}-x_{j\ 2p})}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle,\end{aligned}\tag{3.100a}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}(-j)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(-j)\end{matrix}\right\rangle\\&=-\frac{(x_{k\ 2p}+x_{j\ 2p}-1)}{(x_{k\ 2p}+x_{j\ 2p}+1)}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}(k)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(k)\end{matrix}\right\rangle\\&\quad+\frac{(x_{k\ 2p}+x_{j\ 2p})}{(x_{k\ 2p}+x_{j\ 2p}+1)}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}(k-j)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}(k-j)\end{matrix}\right\rangle\\&\quad+\frac{(x_{k\ 2p}+x_{j\ 2p})}{(x_{k\ 2p}+x_{j\ 2p}+1)}\left\langle\begin{matrix}1 & \Gamma_{2p+1}\\ 0 & \Gamma_{2p}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\Gamma_{2p+1}\\ \Gamma_{2p}\end{matrix}\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.100b}$$

由 (3.98),(3.100) 可以解出,

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(k) \end{matrix} \right\rangle = -\frac{x_{j\ 2p}}{x_{k\ 2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(-j) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-j) \end{matrix} \right\rangle$$
$$+ \frac{x_{j\ 2p}+x_{k\ 2p}}{x_{k\ 2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.101a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(-k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-k) \end{matrix} \right\rangle = \frac{x_{j\ 2p}}{x_{k\ 2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(-j) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-j) \end{matrix} \right\rangle$$
$$+ \frac{x_{k\ 2p}-x_{j\ 2p}}{x_{k\ 2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.101b}$$

取 $\Gamma'_{2p} = 1$, $\Gamma'_{2p-1} = 0$, $\Gamma''_{2p} = \Gamma_{2p}$, $\Gamma_{2p-1} = \hat{\Gamma}_{2p-1}$. 由基本方程 (3.96), 代入 (3.101) 可得约化标量因子满足下方程,

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle \\ &= 2x_{j2p} \left[\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle - \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(j) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(j) \end{matrix} \right\rangle \right] \\ &\times \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{x_{k2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p} \\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p}(k) \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(k) \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle^2 \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{x_{k2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p} \\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p}(-k) \\ \hat{\Gamma}_{2p-1} \end{matrix} \right\rangle^2 \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-k) \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle^2 \right]. \end{aligned} \tag{3.102}$$

利用 (3.91) 得约化标量因子的另一递推关系,

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p}(-j) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(-j) \end{matrix} \right\rangle = \frac{x_{j\ 2p}-1}{x_{j\ 2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.99c}$$

从 (3.97),(3.99) 可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(i) \\ 1 & \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{x_{i\ 2p+1} \mp x_{k\ 2p}+1}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1}(i) \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1}(i) \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(i) \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.103a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(-i) \\ 1 & \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{x_{i\ 2p+1} \pm x_{k\ 2p}}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1}(-i) \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1}(-i) \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(-i) \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.103b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 1 & \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \pm\frac{1}{x_{k\ 2p}}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle\| T^{(2p)} \middle\| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p}(\pm k) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle. \tag{3.103c}$$

递推关系 (3.99) 不能完全确定约化标量因子的数值. 约化标量因子的绝对值可以通过归一关系确定. 对最高权态 $\hat{x}_{i\ 2p} = x_{i\ 2p+1}$, 通过满足正交归一条件

$$\sum_{\Gamma'_{2p},\Gamma''_{2p}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma''_{2p+1} \\ \Gamma'_{2p} & \Gamma''_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\Gamma}_{2}p \end{matrix} \right\rangle^2 = 1,$$

规定相因子使 $\Gamma'_{2p} = 0$ 的约化标量因子为正, 可以求得最高权态的约化系数为

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\Gamma}_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{p} x_{j\ 2p+1}}{\prod_{j=1}^{p}(x_{j\ 2p+1}+1)}}, \tag{3.104a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(i) \\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\Gamma}_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{2\prod_{j=1}^{p}(x_{j\ 2p+1}+x_{i\ 2p+1}+1)}{(2x_{i\ 2p+1}+3)\prod_{j=1}^{p}(x_{j\ 2p+1}+x_{i\ 2p+1}+2)}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(-i) \\ 0 & \hat{\Gamma}_{2p}(-i) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \hat{\Gamma}_{2p}(-i) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\prod_{j\neq i}^{p}(x_{i\ 2p+1}-x_{j\ 2p+1})}{x_{i\ 2p+1}\prod_{j\neq i}^{p}(x_{i\ 2p+1}-x_{j\ 2p+1}-1)}}. \tag{3.104b}$$

由 (3.104) 出发，利用递推关系 (3.99) 和恒等式 (3.49)，用数学归纳法可得

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \frac{\prod_{j=1}^{p} x_{j\ 2p}}{\sqrt{\prod_{j=1}^{p} x_{j\ 2p+1}(x_{j\ 2p+1}+1)}}, \tag{3.105a}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(i) \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{(x_{i\ 2p+1}+1)(2x_{i\ 2p+1}+3)}} \times \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{p}(x_{i\ 2p+1}-x_{j\ 2p}+1)(x_{i\ 2p+1}+x_{j\ 2p}+1)}{\prod_{j\neq i}^{p}(x_{i\ 2p+1}-x_{j\ 2p+1}+1)(x_{i\ 2p+1}+x_{j\ 2p+1}+2)}}, \tag{3.105b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1}(-i) \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{x_{i\ 2p+1}(2x_{i\ 2p+1}-1)}} \times \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{p}(x_{i\ 2p+1}-x_{j\ 2p})(x_{i\ 2p+1}+x_{j\ 2p})}{\prod_{j\neq i}^{p}(x_{i\ 2p+1}-x_{j\ 2p+1}-1)(x_{i\ 2p+1}+x_{j\ 2p+1})}}. \tag{3.105c}$$

(3.105) 和 (3.103) 给出全部 $o(2p+1,R)$ 的约化标量因子. 并具有下列对称性,

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma'_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma'_{2p+1})}{\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1})}} \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma'_{2p+1} \\ 0 & \Gamma_{2p} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_{2p+1} \\ \Gamma_{2p} \end{matrix} \right\rangle, \tag{3.106a}$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma_{2p+1} & \Gamma'_{2p+1} \\ 1 & \Gamma_{2p} & \Gamma'_{2p} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\mathrm{d}(\Gamma'_{2p+1})\mathrm{d}(\Gamma_{2p})}{\mathrm{d}(\Gamma_{2p+1})\mathrm{d}(\Gamma'_{2p})}} \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & \Gamma'_{2p+1} & \Gamma_{2p+1} \\ 1 & \Gamma'_{2p} & \Gamma_{2p} \end{array} \right\rangle . \tag{3.106b}$$

参　考　文　献

[1] Barut A O, Raczka R. Theory of Group Representations and Applications. Warszawa: PNW-Polish Scientific Publishers, 1980

[2] Gel'fand I M, Minlos R A, Shapiro Z Y. Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications, Translated by Cummins T, Boddington T. New York: Pergamon Press, 1963

[3] Naimark M A, Stern A I. Theory of Group Representations. New York: Springer-Verlag, 1982

[4] 孙洪洲. 秩为 2 的单纯紧致李群 $B(2)$ 的不可约表示. 高能物理与核物理, 1980(4): 272

[5] Sun H Z, Han Q Z, Zhang M et. al. Reduction Factors for $O(N) \supset O(N-1)$. Commun Theor Phys, 1998,(30): 541

[6] Ruan D, Sun H Z. Algebraic Expressions for Some $O(N)$ Racah Coefficients. J Math Phys, 1998,(39): 6225

[7] Ruan D, Sun H Z. Algebraic Expressions for Some $O(N)$ Racah coefficients for the two-rowed irreducible representations. Commun Theor Phys,1999,(31): 233

第四章　李超代数及其表示

本章介绍李超代数和李超代数表示的基本概念，第一节引入超代数和李超代数，第二节讨论单李超代数，第三节讨论经典李超代数，第四和第五节讨论经典李超代数的表示.

4.1　李超代数

从节 1.1 知代数是数域 K 上定义有乘法的线性空间，且乘法对加法满足分配律，数乘对乘法满足交换律. 超代数是代数的 Z_2 阶化， Z_2 环是模为 2 的整数集合 $\{\bar{0},\bar{1}\}$，其加法和乘法为其余因子的运算，特别有 $\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$. 超代数又称 Z_2 阶化代数.

设代数 $\mathfrak{a}$ 可分解为 Z_2 阶化空间，

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{a}_{\bar{1}},$$

且其乘法满足

$$\langle\mathfrak{a}_\alpha,\mathfrak{a}_\beta\rangle\subset\mathfrak{a}_{\alpha+\beta},\qquad \alpha,\beta\in Z_2,$$

则 $\mathfrak{a}$ 称为超代数. $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的偶空间，其元素称为偶元， $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的奇空间，其元素称为奇元. 超代数偶元乘偶元或奇元乘奇元得偶元，偶元和奇元相乘得奇元. 对 $x\in\mathfrak{a}_\alpha$，称 x 的阶为 α，记为 $\deg x=\alpha$.

由于超代数是 Z_2 阶化空间，所以我们对阶化空间作一简单讨论. 设 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是 Z_2 阶化空间，如 $U\subset V$，即 U 是 V 的子空间，且 U 满足 $U=U\cap V_{\bar{0}}\oplus U\cap V_{\bar{1}}$，则称 U 是 V 的阶化子空间. 注意一般来说子空间并不一定是阶化子空间，此可从图 4.1 所给的简单例子看出，图中直线 U' 是子空间，但不是阶化子空间，因为

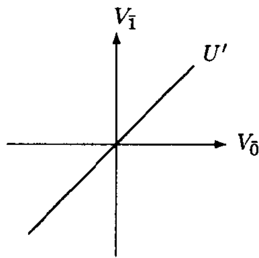


图 4.1

$U' \neq U' \cap V_{\bar{0}} \oplus U' \cap V_{\bar{1}}$.

阶化空间 V 中任意元素 $x \in V$, 可通过 V 中的一组基, 用矩阵表示出来. 设 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, $\dim V_{\bar{0}} = m$, $\dim V_{\bar{1}} = n$, V 称为 $m+n$ 维阶化矩阵. 取 $(e^1, e^2, \cdots, e^m)$ 和 $(e^{m+1}, e^{m+2}, \cdots, e^{m+n})$ 分别为 $V_{\bar{0}}$ 和 $V_{\bar{1}}$ 的基, 则

$$x = \begin{pmatrix} x_{\bar{0}} \\ x_{\bar{1}} \end{pmatrix}, \tag{4.1a}$$

其中

$$x_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in V_{\bar{0}}, \tag{4.1b}$$

$$x_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{pmatrix} \in V_{\bar{1}}. \tag{4.1c}$$

设 $W = W_{\bar{0}} \oplus W_{\bar{1}}$, 是阶化线性空间, $\dim W_{\bar{0}} = i$, $\dim W_{\bar{1}} = j$, 取 $(e'^1, e'^2, \cdots, e'^i)$ 和 $(e'^{i+1}, e'^{i+2}, \cdots, e'^{i+j})$ 分别为 $W_{\bar{0}}$ 和 $W_{\bar{1}}$ 的基, 取

$$y_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \end{pmatrix} \in W_{\bar{0}}, \quad y_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ \vdots \\ y_{i+j} \end{pmatrix} \in W_{\bar{1}},$$

则任意 $y \in W$ 可表为

$$y = \begin{pmatrix} y_{\bar{0}} \\ y_{\bar{1}} \end{pmatrix}.$$

与普通空间线性变换类似，可定义阶化空间线性变换 $L = L(V, W)$，$L : V \longrightarrow W$，满足：

$$L(cz + z') = cL(z) + L(z'), \qquad z, z' \in V,\ c \in K, \tag{4.2}$$

阶化空间线性变换 L 也是阶化空间 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$，在上述基下，$z \in L$ 的矩阵表达式为

$$z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

即偶元 $z \in L_{\bar{0}}$ 有

$$z = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \tag{4.3a}$$

其中 A 为 $i \times m$ 维矩阵，把 $V_{\bar{0}}$ 中元素变到 $W_{\bar{0}}$，D 为 $j \times n$ 维矩阵，把 $V_{\bar{1}}$ 中元素变到 $W_{\bar{1}}$. 奇元 $z \in L_{\bar{1}}$ 有

$$z = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3b}$$

其中 B,C 分别为 $i \times n, j \times m$ 维矩阵，分别把 $V_{\bar{1}}$ 变到 $W_{\bar{0}}$，把 $V_{\bar{0}}$ 变到 $W_{\bar{1}}$.

对由 V 到 V 阶化线性变换，或称 V 上线性变换，可以引入超迹概念. 定义 $z \in L$ 的超迹为

$$\mathrm{str}(z) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(D), \tag{4.4}$$

其中 tr 是普通矩阵的迹.

把阶化空间 V 映入数域 K 的线性泛函全体构成 V 的对偶空间，记为 $V^* = V_{\bar{0}}^* \oplus V_{\bar{1}}^*$, 其中

$$V_{\bar{0}}^* = \{f \in V^* | f(V_{\bar{1}}, K) = 0\},$$
$$V_{\bar{1}}^* = \{f \in V^* | f(V_{\bar{0}}, K) = 0\}.$$

设 $W^* = W_{\bar{0}}^* \oplus W_{\bar{1}}^*$ 是阶化空间 W 的对偶空间，则由阶化线性变换 $L(V,W)$ 可以诱导出将 W^* 变到 V^* 的线性变换 $L^{\mathrm{T}}(W^*,V^*)$, 称为 L 的超转置,

$$(L^{\mathrm{T}}g)(x) = (-)^{\alpha\beta}g(Lx), \qquad x \in V,\ g \in W^*, \tag{4.5}$$

其中 $\alpha = \deg g$, $\beta = \deg L$. 当 $z \in L$ 用 (4.3) 式表示时，有

$$z^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{t}} & -C^{\mathrm{t}} \\ B^{\mathrm{t}} & D^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \tag{4.5$'$}$$

其中 t 是普通矩阵的转置.

例 Grassmann 超代数 $L(n) = L(n)_{\bar{0}} \oplus L(n)_{\bar{1}}$, 是由 n 个 Grassmann 数组成的多项式，偶次式为 $L(n)_{\bar{0}}$, 奇次式为 $L(n)_{\bar{1}}$. Grassmann 数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是反对易数，其乘法满足

$$\begin{cases} \xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i, & i \neq j, \\ {\xi_i}^2 = 0, \end{cases}$$

其中 $i,j = 1,2,\cdots,n$, 以 Grassmann 数的乘法定义 $L(n)$ 的乘法，注意 $\deg \xi_i = \bar{1}$, 设 $\alpha,\beta \in Z_2$, 乘法满足 $\langle L(n)_\alpha, L(n)_\beta\rangle \subset L(n)_{\alpha+\beta}$, $\alpha,\beta \in Z_2$, 故 $L(n)$ 构成超代数.

例 阶化空间 V 上阶化线性变换 $L(V,V)$, 定义两个线性变换的乘法为连续两次线性变换，即相应线性变换的矩阵相乘，满足 $\langle L(V,V)_\alpha, L(V,V)_\beta\rangle \subset L(V,V)_{\alpha+\beta}$, 故 $L(V,V)$ 构成超代数.

由节 1.1 知李代数是代数，其乘法满足双线性，反对易性和 Jacobi 恒等式. 类似的可以定义李超代数. 设 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 是超代数，对 $x,y,z \in \mathfrak{a}$, $c,c' \in K$, $\deg x = \alpha$, $\deg y = \beta$, 若其乘法满足

(1) 双线性

$$\langle cx+c'y,z\rangle = c\langle x,z\rangle + c'\langle y,z\rangle,$$
$$\langle z,cx+c'y\rangle = c\langle z,x\rangle + c'\langle z,y\rangle;$$

(2) 阶化反对易性

$$\langle x,y\rangle = -(-)^{\alpha\beta}\langle y,x\rangle;$$

(3) 阶化 Jacobi 恒等式

$$\langle\langle x,y\rangle,z\rangle = \langle x,\langle y,z\rangle\rangle - (-)^{\alpha\beta}\langle y,\langle x,z\rangle\rangle;$$

则称 $\mathfrak{a}$ 为李超代数. 李超代数又称阶化李代数, 实际是 Z_2 阶化李代数. 从定义可看出, 若交换两个奇元相乘顺序, 会相差一个负号.

从节 1.1 知由代数的乘法可通过对易关系诱导出李代数. 类似地, 由超代数 $\mathfrak{a}'$ 的乘法, 设 $x,y\in\mathfrak{a}'$, 用 xy 表超代数 $\mathfrak{a}'$ 的乘法, 通过下列对易关系和反对易关系定义新的乘法 $\langle x,y\rangle$, 当 $x\in\mathfrak{a}'_{\bar{0}}$ 或 $y\in\mathfrak{a}'_{\bar{0}}$, 有

$$\langle x,y\rangle = [x,y] = xy-yx, \tag{4.6a}$$

当 $x\in\mathfrak{a}'_{\bar{1}}$ 和 $y\in\mathfrak{a}'_{\bar{1}}$, 有

$$\langle x,y\rangle = \{x,y\} = xy+yx, \tag{4.6b}$$

则诱导出李超代数 $\mathfrak{a}$. 显然 $\mathfrak{a}$ 满足双线性, 阶化反对易性和阶化 Jacobi 恒等式. 称李超代数 $\mathfrak{a}$ 是从超代数 $\mathfrak{a}'$ 诱导而来.

从李超代数的定义可看出, 李超代数与超代数不同, 它不是李代数的 Z_2 阶化. 而李代数却是李超代数的一种, 当李超代数的所有奇元为零时即为李代数.

由李超代数 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 是阶化线性空间, 设 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 和 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 的维数为 l 和 ξ, 所以可取 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 和 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 的基分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_l)$ 和 $(y_1,y_2,\cdots,y_\xi)$. 用英文字母作偶空间基的下标, 用希腊字母作奇空

间基的下标，则 $\mathfrak{a}$ 的乘法可以用基的对易关系和反对易关系写出

$$\begin{aligned}
[x_i, x_j] &= f^k_{i\,j} x_k, \\
[x_i, y_\alpha] &= F^\beta_{i\,\alpha} y_\beta, \\
\{y_\alpha, y_\beta\} &= A^i_{\alpha\,\beta} x_i.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

系数 $f^k_{i\,j}$, $F^\beta_{i\,\alpha}$ 和 $A^i_{\alpha\,\beta}$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的结构常数. 阶化反对易性要求

$$\begin{aligned}
f^k_{i\,j} &= -f^k_{j\,i}, \\
F^\beta_{i\,\alpha} &= -F^\beta_{\alpha\,i}, \\
A^i_{\alpha\,\beta} &= A^i_{\beta\,\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.8a}$$

取重复指标求和，阶化 Jacobi 恒等式要求

$$\begin{aligned}
&f^j_{m\,n} f^i_{j\,k} + f^j_{n\,k} f^i_{j\,m} + f^j_{k\,m} f^i_{j\,n} = 0, \\
&f^j_{m\,n} F^\delta_{j\,\alpha} - F^\gamma_{n\,\alpha} F^\delta_{m\,\gamma} + F^\gamma_{m\,\alpha} F^\delta_{n\,\gamma} = 0, \\
&A^j_{\beta\,\gamma} f^n_{m\,j} - F^\delta_{m\,\gamma} A^n_{\beta\,\delta} - F^\delta_{m\,\beta} A^n_{\gamma\,\delta} = 0, \\
&A^j_{\beta\,\gamma} F^\delta_{j\,\alpha} + A^j_{\gamma\,\alpha} F^\delta_{j\,\beta} + A^j_{\alpha\,\beta} F^\delta_{j\,\gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{4.8b}$$

从 (4.7) 式可以看出构成李超代数的条件，第一式说明 $\mathfrak{a}$ 的偶空间 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 构成李代数，第二式说明奇空间 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 给出一个 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 的表示空间，第三式说明存在一个 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 乘 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 到 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 的同态映射 $\Phi : \langle \mathfrak{a}_{\bar{1}}, \mathfrak{a}_{\bar{1}} \rangle \to \mathfrak{a}_{\bar{0}}$. 所以一个李超代数应该从三个方面来描述，即李代数 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$, 李代数 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 的表示 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 和一个 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 乘 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 的到 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 的同态映射. 这些条件在单李超代数的分类中起重要作用.

如上所述，李超代数 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 在上述基下，可以用基的对易关系和反对易关系 (4.7) 式表示出来. 在这意义上说，李超代数由满足对易关系和反对易关系的封闭集合构成. 据此可以定义 $\mathfrak{a}$ 的伴随表示 $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$, 对 $z, z' \in \mathfrak{a}$, 有 $\mathrm{ad}(z)z' = \langle z, z' \rangle$, 具体地

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(x_i) x_j &= [x_i, x_j] = f^k_{i\,j} x_k, \\
\mathrm{ad}(x_i) y_\alpha &= [x_i, y_\alpha] = F^\beta_{i\,\alpha} y_\beta, \\
\mathrm{ad}(y_\alpha) x_i &= -[x_i, y_\alpha] = -F^\beta_{i\,\alpha} y_\beta, \\
\mathrm{ad}(y_\alpha) y_\beta &= \{y_\alpha, y_\beta\} = A^i_{\alpha\,\beta} x_i.
\end{aligned} \tag{4.9a}$$

所以伴随表示的非零矩阵元为

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(x_i)_j^k &= f_{i\,j}^k, \\ \mathrm{ad}(x_i)_\alpha^\beta &= F_{i\,\alpha}^\beta, \\ \mathrm{ad}(y_\alpha)_i^\beta &= -F_{i\,\alpha}^\beta, \\ \mathrm{ad}(y_\alpha)_\beta^i &= A_{\alpha\,\beta}^i. \end{aligned} \tag{4.9b}$$

其余矩阵元如 $\mathrm{ad}(x_i)_j^\alpha = \mathrm{ad}(x_i)_\alpha^j = \mathrm{ad}(y_\alpha)_i^j = \mathrm{ad}(y_\alpha)_\beta^\gamma = 0$.

与李代数类似，可以定义李超代数 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 型，它是 $\mathfrak{a}$ 上的双线型，$(x\ y) = \mathrm{str}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$. 由此定义可看出 Killing 型是偶的，它还满足超对称性 $(x\ y) = (-)^{\deg x \deg y}(y\ x)$ 和不变性 $(\langle x, y\rangle\ z) = (x\ \langle y, z\rangle)$, 对 $x, y, z \in \mathfrak{a}$.

在基为 $(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_\xi)$ 时，注意偶，奇空间基的下标分别用英文 i, j, k, l 和希文 α, β, γ 标记，则 Killing 型可以用矩阵 $(g_{\mu\,\nu})$ 描述，非零的矩阵元为

$$\begin{aligned} g_{i\,j} = g_{j\,i} &= \mathrm{str}(\mathrm{ad}(x_i)\mathrm{ad}(x_j)) \\ &= \sum_{k\,l} f_{i\,l}^k f_{j\,k}^l - \sum_{\alpha\,\beta} F_{i\,\alpha}^\beta F_{j\,\beta}^\alpha, \\ g_{\alpha\,\beta} = -g_{\beta\,\alpha} &= \mathrm{str}(\mathrm{ad}(y_\alpha)\mathrm{ad}(y_\beta)) \\ &= -\sum_{i\,\gamma} A_{\alpha\,\gamma}^i F_{i\,\beta}^\gamma + \sum_{i\,\gamma} F_{i\,\alpha}^\gamma A_{\beta\,\gamma}^i. \end{aligned} \tag{4.10}$$

其余矩阵元为零，即 $g_{\alpha\,i} = g_{i\,\alpha} = 0$.

例 超 Poincare 代数，此处讨论粒子物理超对称中最小的超 Poincare 代数. 其李代数为 Poincare 代数, 在采用度规张量为 $\eta_{\mu\,\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) = \eta^{\mu\,\nu}$, $\mu, \nu, \lambda, \rho = 0, 1, 2, 3$ 时，其生成元满足以下对易关系

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P\lambda] = 0, \\ &\frac{1}{\mathrm{i}}[P_\mu, J_{\lambda\,\rho}] = -\eta_{\mu\,\rho}P_\lambda + \eta_{\lambda\,\mu}P_\rho, \\ &\frac{1}{\mathrm{i}}[J_{\mu\,\nu}, J_{\lambda\,\rho}] = \eta_{\lambda\,\nu}J_{\mu\,\rho} - \eta_{\rho\,\nu}J_{\mu\,\lambda} + \eta_{\rho\,\mu}J_{\nu\,\lambda} - \eta_{\lambda\,\mu}J_{\nu\,\rho}. \end{aligned}$$

P_μ 是时空平移，$J_{\mu\,\nu}$ 是空间转动和特殊 Lorentz 变换. 其奇空间有四个生成元 S_α，$\alpha=1,2,3,4$. S_α 与 Poincare 代数生成元满足以下对易关系

$$
\begin{aligned}
&[S_\beta, P_\mu]=0,\\
&[S_\beta, J_{\mu\,\nu}]=\frac{1}{2}(\sigma_{\mu\,\nu}S)_\beta,
\end{aligned}
$$

奇元间满足以下反对易关系

$$\{S_\alpha, S_\beta\} \;=\; -(\gamma_\mu C)_{\alpha\,\beta}P^\mu,$$

其中 γ_μ 是 Dirac 矩阵，满足 $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\eta_{\mu\,\nu}$，$\sigma_{\mu\,\nu}=\dfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$，C 是电荷共轭矩阵，满足 $C^{-1}\gamma_\mu C=-\gamma_\mu^{\mathrm{t}}, C^{-1}=C^\dagger=C$.

这是把普通四维时空 x_μ 推广到包括一个反对易旋量 θ_α，$\alpha=1,2,3,4$. 相应生成元的微分表达式为

$$
\begin{aligned}
&P_\mu=\mathrm{i}\partial_\mu,\\
&J_{\mu\,\nu}=\mathrm{i}(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)-\frac{1}{2}\bar\theta\sigma_{\mu\,\nu}\frac{\partial}{\partial\bar\theta},\\
&S_\alpha=\mathrm{i}(\frac{\partial}{\partial\bar\theta_\alpha}+\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\mu\gamma^\mu\theta_\alpha),
\end{aligned}
$$

其中 $\partial_\mu=\eta_{\mu\,\nu}\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$，$\bar\theta=\theta^\dagger\gamma_0$.

例　一般线性李超代数 $pl(m,n)=pl(V)$, 是从阶化空间 V 上线性变换超代数 $L(V)$ 诱导出的李超代数. 它在李超代数中的作用，类似一般线性李代数 $gl(n)$ 在李代数中的作用，是相当重要的.

设 $V=V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$，$\dim V_{\bar 0}=m$，$\dim V_{\bar 1}=n$. 对 $x\in pl(m,n)_\alpha$，$y\in pl(m,n)_\beta$，$\alpha,\beta\in Z_2$, 乘法定义为

$$\langle x,y\rangle=xy-(-)^{\alpha\beta}yx.$$

其偶空间 $pl(m,n)_{\bar{0}}$ 和奇空间 $pl(m,n)_{\bar{1}}$ 分别为

$$pl(m,n)_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \tag{4.11a}$$

$$pl(m,n)_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.11b}$$

其中 A 和 D 分别为 $m \times m$ 和 $n \times n$ 维矩阵，分别把 $V_{\bar{0}}$ 变到 $V_{\bar{0}}$ 和 $V_{\bar{1}}$ 变到 $V_{\bar{1}}$. 所以是一般线性李代数 $gl(m)$ 和 $gl(n)$ 的直和，即 $pl(m,n)_{\bar{0}} = gl(m) \oplus gl(n)$. 而 B 为 $m \times n$ 维矩阵，将 $V_{\bar{1}}$ 变到 $V_{\bar{0}}$. C 为 $n \times m$ 维矩阵，将 $V_{\bar{0}}$ 变到 $V_{\bar{1}}$.

当李超代数 $\mathfrak{a}$ 可以分解为有限维 Z_2 阶化子空间的直和，即 $\mathfrak{a} = \oplus_{i \in Z} \mathfrak{a}_i$, 且有 $\langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j \rangle \subseteq \mathfrak{a}_{i+j}$, 则称 $\mathfrak{a}$ 为 Z 阶化李超代数. 如还满足 $\mathfrak{a}_{\bar{0}} = \oplus_i \mathfrak{a}_{2i}$ 和 $\mathfrak{a}_{\bar{1}} = \oplus_i \mathfrak{a}_{2i+1}$, 则称此 Z 阶化与 Z_2 阶化是相容的. $pl(m,n)$ 具有相容的 Z 阶化， $pl(m,n) = pl(m,n)_{-1} \oplus pl(m,n)_0 \oplus pl(m,n)_1$. 它们的元素具有以下 $(m+n) \times (m+n)$ 维阶化矩阵的形式

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in pl(m,n)_{-1},$$
$$x = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad x \in pl(m,n)_0,$$
$$x = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in pl(m,n)_1.$$

设 $E_{\mu\,\nu}$ 是第 μ 行第 ν 列元素为 1, 其余元素为 0 的 $(m+n) \times (m+n)$ 维矩阵，可取 $E_{i\,j}, E_{\alpha\,\beta}, E_{i\,\alpha}, E_{\alpha\,i}$ 为 $pl(m,n)$ 的基，其中 $i,j,k,l = 1,2,\cdots,m$, 而 $\alpha,\beta,\gamma,\delta = m+1, m+2, \cdots, m+n$. 于是基

之间满足下列非零对易关系和反对易关系，如

$$
\begin{aligned}
&[E_{i\,j}, E_{k\,l}] = \delta_{j\,k}E_{i\,l} - \delta_{i\,l}E_{k\,j},\\
&[E_{i\,j}, E_{\alpha\,l}] = -\delta_{i\,l}E_{\alpha\,j},\\
&[E_{i\,j}, E_{l\,\alpha}] = \delta_{j\,l}E_{i\,\alpha},\\
&[E_{\alpha\,\beta}, E_{\gamma\,\delta}] = \delta_{\beta\,\gamma}E_{\alpha\,\delta} - \delta_{\alpha\,\delta}E_{\gamma\,\beta},\\
&[E_{\alpha\,\beta}, E_{\gamma\,l}] = \delta_{\beta\,\gamma}E_{\alpha\,l},\\
&[E_{\alpha\,\beta}, E_{l\,\gamma}] = -\delta_{\alpha\,\gamma}E_{l\,\beta},\\
&\{E_{\alpha\,i}, E_{j\,\beta}\} = \delta_{i\,j}E_{\alpha\,\beta} + \delta_{\alpha\,\beta}E_{j\,i}.
\end{aligned}
$$

任意 $x \in pl(m,n)$ 可以写成 $x = \sum_{i\,j} x_{i\,j}E_{i\,j} + \sum_{\alpha\,\beta} x_{\alpha\,\beta}E_{\alpha\,\beta} + \sum_{i\,\alpha} x_{i\,\alpha}E_{i\,\alpha} + \sum_{\alpha\,i} x_{\alpha\,i}E_{\alpha\,i}$，利用基之间的对易关系和反对易关系，可以求出 x 的伴随表示的非零矩阵元，如 $\mathrm{ad}(x)_{l\,j,\,i\,j} = x_{l\,i}$，$l \neq i$，$\mathrm{ad}(x)_{i\,l,\,i\,j} = -x_{j\,l}$，$l \neq j$，$\mathrm{ad}(x)_{i\,j,\,i\,j} = x_{i\,i} - x_{j\,j}, \cdots$，等等，从而直接计算出 $x, y \in pl(m,n)$ 的 Killing 型为

$$
(x,y) = 2(m-n)\mathrm{str}(xy) - 2\mathrm{str}(x)\mathrm{str}(y). \tag{4.12}
$$

下面讨论超代数的子代数和理想．设超代数 $\mathfrak{h}$ 是超代数 $\mathfrak{a}$ 的子代数，并且是 $\mathfrak{a}$ 的阶化子空间，则称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的阶化子代数，有时也简称为子代数．设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的子代数，而且对 $x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{a}$ 满足 $\langle x,y\rangle \subset \mathfrak{h}$，即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的不变子代数，则称 $\mathfrak{h}$ 是超代数 $\mathfrak{a}$ 的阶化理想，有时也简称为理想．同样阶化子代数和阶化理想的定义也适用于李超代数．

如超 Poincare 代数中，以空间平移算子 P_μ 为基的子空间，是它的阶化理想．又如一般线性李超代数 $pl(m,n)$ 中，以 $(m+n)\times(m+n)$ 的单位矩阵 E_{m+n} 为基的子空间 $\{cE_{m+n}|c \in K\}$，是它的阶化理想．

现讨论超代数的同构与同态．若有线性偶映射 Φ 将超代数 $\mathfrak{a}$

映射到超代数 $\mathfrak{a}'$,

$$\begin{aligned}&\Phi:\mathfrak{a}\longrightarrow\mathfrak{a}',\\&\Phi(\mathfrak{a}_\alpha)\subseteq\mathfrak{a}'_\alpha,\qquad \alpha\in Z_2.\end{aligned}\tag{4.13a}$$

且保持超代数的运算规律不变，即向量数乘，加法和乘法不变，也就是对 $x,y\in\mathfrak{a}$, $c,c'\in K$ 有

$$\begin{aligned}&\Phi(cx+c'y)=c\Phi(x)+c'\Phi(y),\\&\Phi(\langle x,y\rangle)=\langle\Phi(x),\Phi(y)\rangle,\end{aligned}\tag{4.13b}$$

则称 Φ 是同态映射，称超代数 $\mathfrak{a}$ 与超代数 $\mathfrak{a}'$ 同态. 将此定义中的超代数换成李超代数，也就是李超代数的同态定义.

如从超代数 $\mathfrak{a}$ 到超代数 $\mathfrak{a}'$ 的同态映射是一一的，则称 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{a}'$ 是同构超代数. 同样李超代数的同构也是将此定义中的超代数换成李超代数即可. 所以两个同构的超代数或两个同构的李超代数满足同样的运算规律，从抽象的数学角度看，它们是完全一样的.

4.2 单李超代数

设李超代数 $\mathfrak{a}$ 除 $\{0\}$ 和 $\mathfrak{a}$ 自身之外，不含有其他阶化理想，且 $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}\rangle\neq\{0\}$, 即 $\mathfrak{a}$ 不是交换李超代数，则称 $\mathfrak{a}$ 为单李超代数. 显然上节提到的超 Poincare 代数和一般线性李超代数都不是单李超代数.

当 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\bar 0}\oplus\mathfrak{a}_{\bar 1}$ 为单李超代数时，有

(1) $[\mathfrak{a}_{\bar 0},\mathfrak{a}_{\bar 1}]=\mathfrak{a}_{\bar 1}$, 否则 $\mathfrak{a}_{\bar 0}\oplus[\mathfrak{a}_{\bar 0},\mathfrak{a}_{\bar 1}]$ 是非平庸阶化理想;

(2) 当 $\mathfrak{a}_{\bar 1}\neq\{0\}$ 时，有 $\{\mathfrak{a}_{\bar 1},\mathfrak{a}_{\bar 1}\}=\mathfrak{a}_{\bar 0}$, 否则 $\{\mathfrak{a}_{\bar 1},\mathfrak{a}_{\bar 1}\}\oplus\mathfrak{a}_{\bar 1}$ 是非平庸阶化理想;

(3) $\{A\in\mathfrak{a}|\langle A,\mathfrak{a}_{\bar 1}\rangle=\{0\}\}=\{0\}$, 否则 $\{A\in\mathfrak{a}|\langle A,\mathfrak{a}_{\bar 1}\rangle=\{0\}\}$ 是非平庸阶化理想.

可以证明若李超代数 $\mathfrak{a}$ 满足

(1) $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 在 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 的表示是忠实的和不可约的;

(2) $\langle \mathfrak{a}_{\bar{1}}, \mathfrak{a}_{\bar{1}} \rangle = \mathfrak{a}_{\bar{0}}$;

(3) $\mathfrak{a}_{\bar{1}} \neq \{0\}$;

则 $\mathfrak{a}$ 是单李超代数.

单李超代数的 Killing 型是非退化的或是恒等于零的.

与李代数类似, 也可以作李超代数的降中心理想子代数链和导来理想子代数链, 并定义幂零和可解李超代数. 李超代数 $\mathfrak{a}$ 的降中心链 $\mathfrak{a}^{[0]}, \mathfrak{a}^{[1]}, \mathfrak{a}^{[2]}, \cdots, \mathfrak{a}^{[k]}, \cdots$ 为 $\mathfrak{a}^{[0]} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{[1]} = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{[0]} \rangle$, $\mathfrak{a}^{[2]} = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{[1]} \rangle, \cdots$, $\mathfrak{a}^{[k]} = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{[k-1]} \rangle, \cdots$. 当有正整数 n 使 $\mathfrak{a}^{[n]} = \{0\}$, 则称 $\mathfrak{a}$ 为幂零李超代数. 李超代数 $\mathfrak{a}$ 的导来链 $\mathfrak{a}^{(0)}, \mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{a}^{(k)}, \cdots$ 为 $\mathfrak{a}^{(0)} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{(1)} = \langle \mathfrak{a}^{(0)}, \mathfrak{a}^{(0)} \rangle$, $\mathfrak{a}^{(2)} = \langle \mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(1)} \rangle, \cdots$, $\mathfrak{a}^{(k)} = \langle \mathfrak{a}^{(k-1)}, \mathfrak{a}^{(k-1)} \rangle, \cdots$. 当有正整数 n 使 $\mathfrak{a}^{(n)} = \{0\}$, 则称 $\mathfrak{a}$ 为可解李超代数.

显然单李超代数既不是幂零的, 也不是可解的. 可以证明李超代数 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 可解的充分必要条件是 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 为可解.

单李超代数的分类已经由 Kac 和 Scheunert 等完成. 单李超代数又分为经典李超代数和 Cartan 李超代数两大类.

设 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 是单李超代数, 且 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 在 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 的表示是不完全可约的, 则称 $\mathfrak{a}$ 是 Cartan 李超代数. Cartan 李超代数有以下四个系列:

(1) $W(n)$, $n \geq 2$, 维数为 $n2^n$,

(2) $S(n)$, $n \geq 3$, 维数为 $(n-1)2^n + 1$,

(3) $\tilde{S}(n)$, $n \geq 1$, 维数为 $(n-1)2^n + 1$,

(4) $H(n)$, $n \geq 4$, 维数为 $2^n - 2$.

Cartan 李超代数的性质与无限维李代数有许多类似, 但 Cartan 李超代数是有限维的.

设 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 是单李超代数, 且 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 在 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 的表示是完全可约的, 即 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 在 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 的表示是不可约的或完全可约的, 则称 $\mathfrak{a}$ 是经典李超代数. 经典李超代数又分为基本经典李超代数和奇异李超代

数两种. 设 E_n 为 $n\times n$ 维的单位矩阵, 基本经典李超代数有以下四个系列和三个例外李超代数:

(1) $A(m,n)=spl(m+1,n+1),\quad m\neq n,\ m,n\geq 0,$

$A(n,n)=spl(n+1,n+1)/E_{2n+2},\quad n>0,$

(2) $B(m,n)=osp(2m+1,2n),\quad m\geq 0,\ n>0,$

(3) $C(n)=osp(2,2n-2),\quad n\geq 2,$

(4) $D(m,n)=osp(2m,2n),\quad m\geq 2,\ n>0$

(5) $F(4)=\Gamma_3,$

(6) $G(3)=\Gamma_2,$

(7) $D(2,1,\alpha)=\Gamma(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3).$

奇异李超代数有以下两个系列:

(1) $P(n)=b(n+1),$

(2) $Q(n)=\tilde{Q}/E_{2n+2}, n\geq 2,$ 也有人称其为 Gell-mann, Michel, Radicati 的 (f,d) 代数. 其中 $\tilde{Q}$ 又称为 $d(n+1)$.

本书将着重讨论基本经典李超代数. 下面先给出以经典李超代数的定义和最基本性质.

$A(m,n)$ 和 $A(n,n)$

已知 $A(m,n)=spl(m+1,n+1)$, $A(n,n)=spl(n+1,n+1)/E_{2n+2}$, $spl(m,n)$ 是特殊线性李超代数, 它是一般线性李超代数 $pl(m,n)$ 取超迹为零的子代数, 即

$$spl(m,n)=\{x\in pl(m,n)|\mathrm{str}(x)=0\}. \tag{4.14}$$

由于对 $x\in spl(m,n)$, $y\in pl(m,n)$, 有 $\mathrm{str}(\langle x,y\rangle)=0$, 故 $spl(m,n)$ 是 $pl(m,n)$ 的理想. 设 $k=\{cE_{m+n}\}$, 有 $pl(m,n)=k\oplus spl(m,n)$.

在 $m\neq n$ 时, 超迹为零条件正好可以去掉 $pl(m,n)$ 的另一理想 k. 所以 $A(m,n)=spl(m+1,n+1)$ 是单李超代数. 而在 $m=n$ 时, 超迹为零条件不可能去掉 $pl(n,n)$ 的理想 $k=\{cE_{n+n}\}$, 所以

$spl(n,n)$ 不是单李超代数. 只有去掉这理想的 $A(n,n) = spl(n+1,n+1)/E_{2n+2}$ 才是单李超代数.

$spl(m,n)$ 与 $pl(m,n)$ 一样具有相容的 Z 阶化, $spl(m,n) = spl(m,n)_{-1} \oplus spl(m,n)_0 \oplus spl(m,n)_1$. 它们的元素具有以下 $(m+n) \times (m+n)$ 维阶化矩阵的形式

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in spl(m,n)_{-1},$$

$$x = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad x \in spl(m,n)_0,$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in spl(m,n)_1,$$

其中 A 和 D 分别为 $m \times m$ 和 $n \times n$ 维矩阵, 并且满足 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$. B 为 $m \times n$ 维矩阵, C 为 $n \times m$ 维矩阵. 由此可得 $spl(m,n)_0 = sl(m) \oplus sl(n) \oplus k$, 其中 $sl(m), sl(n)$ 为特殊线性李代数, 而 $k = \{c(nE_m + mE_n)|c \in K\}$ 是一维李代数, E_m, E_n 是 m, n 维单位矩阵.

从 $pl(m,n)$ 的 Killing 型 (4.13) 式, 加上超迹为零的条件, 设 $x, y \in spl(m,n)$, 可得 $spl(m,n)$ 的 Killing 型为

$$(x,y) = \mathrm{str}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)) = 2(m-n)\mathrm{str}(xy). \qquad (4.15)$$

$B(m,n), C(n)$ 和 $D(m,n)$

这三个李超代数都属于正交辛李超代数 $osp(m,r)$ 系列. 它是 $pl(V) = pl(m,r)$ 的子代数, 并保持下双线型不变. 设 $x, y \in V$,

$$osp(m,r) = \{a \in pl(m,r)|(ax)^{\mathrm{t}}My + (-)^{\deg a \deg x}x^{\mathrm{t}}May\}, \quad (4.16a)$$

其中

$$M = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad H^{\mathrm{t}} = H, \; G^{\mathrm{t}} = -G, \qquad (4.16b)$$

H 是 m 维对称矩阵，由 G 的反对称性知其维数为偶 $r = 2n$. 当用阶化矩阵表 $osp(m, 2n)$ 的元素

$$a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad a \in osp(m, 2n),$$

则由双线型不变得

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{t}}H + HA &= 0, \\ D^{\mathrm{t}}G + GD &= 0, \\ B^{\mathrm{t}}H - GC &= 0. \end{aligned} \tag{4.16c}$$

由此可见 A 是正交代数 $o(m, C)$, D 是辛代数 C_n.

对 $B(m, n) = osp(2m + 1, 2n)$, 用 E_i 表 $i \times i$ 的单位矩阵，当 $m \geq 0$, $n > 0$ 时，若取

$$M = \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 & 0 \\ E_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.17a}$$

则任意 $a \in B(m, n)$ 可用如下 $(2m + 1) + 2n$ 维阶化矩阵表出

$$a = \begin{pmatrix} w & b & u & x & x_1 \\ c & -w^{\mathrm{t}} & v & y & y_1 \\ -v^{\mathrm{t}} & -u^{\mathrm{t}} & 0 & z & z_1 \\ -y_1^{\mathrm{t}} & -x_1^{\mathrm{t}} & -z_1^{\mathrm{t}} & d & e \\ y^{\mathrm{t}} & x^{\mathrm{t}} & z^{\mathrm{t}} & f & -d^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \tag{4.17b}$$

其中 w, b, c 是 $m \times m$ 矩阵， d, e, f 是 $n \times n$ 矩阵， x, y, x_1, y_1 是 $m \times n$ 矩阵， u, v 是 $m \times 1$ 矩阵， z, z_1 是 $1 \times n$ 矩阵，且满足

$b^{\mathrm{t}}=-b,\ c^{\mathrm{t}}=-c,\ e^{\mathrm{t}}=e, f^{\mathrm{t}}=f.$

对 $D(m,n)=osp(2m,2n)$, 当 $m\geq 2,\ n>0$ 时，若取

$$M=\begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 & 0 \\ E_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.18a}$$

则任意 $a\in D(m,n)$ 可用如下 $2m+2n$ 维阶化矩阵表出

$$a=\begin{pmatrix} w & b & x & x_1 \\ c & -w^{\mathrm{t}} & y & y_1 \\ -y_1^{\mathrm{t}} & -x_1^{\mathrm{t}} & d & e \\ y^{\mathrm{t}} & x^{\mathrm{t}} & f & -d^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \tag{4.18b}$$

其中 w,b,c 是 $m\times m$ 矩阵， d,e,f 是 $n\times n$ 矩阵， x,y,x_1,y_1 是 $m\times n$ 矩阵，且满足 $b^{\mathrm{t}}=-b,\ c^{\mathrm{t}}=-c,\ e^{\mathrm{t}}=e,\ f^{\mathrm{t}}=f.$

对 $C(n)=osp(2,2n-2)$, 当 $n\geq 2$ 时，则任意 $a\in C(n)$ 可用如下 $2n$ 维阶化矩阵表出

$$a=\begin{pmatrix} w & 0 & x & x_1 \\ 0 & -w & y & y_1 \\ -y_1^{\mathrm{t}} & -x_1^{\mathrm{t}} & d & e \\ y^{\mathrm{t}} & x^{\mathrm{t}} & f & -d^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

其中 $w\in K, d,e,f$ 是 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵，x,y,x_1,y_1 是 $1\times(n-1)$ 矩阵，且满足 $e^{\mathrm{t}}=e, f^{\mathrm{t}}=f.$

$C(n)$ 是 Z 阶化的，即

$$
C(n)_0 = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & f & -d^{\mathrm{t}} \end{pmatrix},
$$

$$
C(n)_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & y_1 \\ -y_1^{\mathrm{t}} & 0 & 0 & 0 \\ y^{\mathrm{t}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.19'}
$$

$$
C(n)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1^{\mathrm{t}} & 0 & 0 \\ 0 & x^{\mathrm{t}} & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

所以 $C(n)$ 的性质与 $D(m,n)$ 是不同的. 从式 (4.17),(4.18) 和 (4.19) 可得

$$
\begin{aligned}
B(m,n)_{\bar{0}} &= B_m \oplus C_n, \\
D(m,n)_{\bar{0}} &= D_m \oplus C_n, \\
C(n)_{\bar{0}} &= k \oplus C_{n-1},
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

其中 k 是一维李代数， k 的生成元为

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

另外还应指出，上述 (4.17a),(4.18a) 中矩阵 M 还可取其他形式，只要保持 H 是对称矩阵， G 是反对称矩阵，都可以给出 $B(m,n), D(m,n)$ 和 $C(n)$ 的矩阵实现.

例外李超代数 $F(4), G(3)$ 和 $D(2,1,\alpha)$

可以证明只存在的唯一的经典李超代数 $F(4)$, 其偶空间为 $F(4)_{\bar{0}} = B_3 \oplus A_1$, 偶空间在奇空间 $F(4)_{\bar{1}}$ 的表示为 $spin_7 \otimes sl_2$. $F(4)$ 的维数是 40. 它的 killing 型是非退化的.

可以证明只存在的唯一的经典李超代数 $G(3)$, 其偶空间为 $G(3)_{\bar{0}} = G_2 \oplus A_1$, 偶空间在奇空间 $G(3)_{\bar{1}}$ 的表示为 $G_2 \otimes sl_2$. $G(3)$ 的维数是 31. 它的 killing 型是非退化的.

可以证明只存在的一个参数 α 的经典李超代数 $D(2,1,\alpha)$, 其偶空间为 $D(2,1,\alpha)_{\bar{0}} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$, 偶空间在奇空间的表示为 $sl_2 \otimes sl_2 \otimes sl_2$. $D(2,1,\alpha)$ 的维数是 17, 其中参数 α 为除 0 和 -1 之外的复数, 它的 killing 型为零.

奇异李超代数 $P(n)$ 和 $Q(n)$

设

$$M = \begin{pmatrix} 0 & E_{n+1} \\ E_{n+1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.21a}$$

奇异李超代数 $P(n)$ 的定义为

$$P(n) = \{a \in spl(n+1, n+1) | a^{\mathrm{T}} M + (-)^{\deg a} M a = 0\}, \tag{4.21b}$$

设 b, c, d 为 $(n+1) \times (n+1)$ 维矩阵, 则 $P(n)$ 中元素 a 可由下矩阵给出

$$a = \begin{pmatrix} d & b \\ c & -d^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \qquad b^{\mathrm{t}} = b,\ c^{\mathrm{t}} = -c,\ \mathrm{tr}(d) = 0. \tag{4.21c}$$

可以证明当 $n \geq 2$ 时, $P(n)$ 是单李超代数. 它的 Killing 型为零.

设 $d \in gl(n+1), b \in sl(n+1)$, 则李超代数 $\tilde{Q}(n)$ 为

$$\tilde{Q}(n) = \left\{ a \in spl(n+1, n+1) \mid a = \begin{pmatrix} d & b \\ b & d \end{pmatrix} \right\}. \tag{4.22a}$$

$\tilde{Q}$ 不是单的，当去掉其理想 E_{2n+2} 后，可以得到单李超代数 $Q(n)$，即 $Q(n) = \tilde{Q}/E_{2n+2}$. $Q(n)_{\bar{0}} = A_n$，它的 Killing 型为零.

表 (4.1) 和 (4.2) 给出经典李超代数的简单性质.

表 4.1 经典李超代数其偶空间在奇空间的表示是不可约的

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_{\bar{0}}$	$\mathfrak{a}_{\bar{0}}\vert\mathfrak{a}_{\bar{1}}$	dim
$B(m,n)$	$B_m \oplus C_n$	$so_{2m+1} \otimes sp_{2n}$	$2(m+n)^2 + m + 3n$
$D(m,n)$	$D_m \oplus C_n$	$so_{2m} \otimes sp_{2n}$	$2(m+n)^2 - m + n$
$F(4)$	$B_3 \oplus A_1$	$spin_7 \otimes sl_2$	40
$G(3)$	$G_2 \oplus A_1$	$G_2 \otimes sl_2$	31
$D(2,1,\alpha)$	$A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$	$sl_2 \otimes sl_2 \otimes sl_2$	17
$Q(n)$	A_n	$\mathrm{ad}\, sl_{n+1}$	$2(n+1)^2 - 2$

表 4.2 经典李超代数其偶空间在奇空间的表示是两个不可约表示直和

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0\vert\mathfrak{a}_{-1}$	$\mathfrak{a}_0\vert\mathfrak{a}_1$	dim
$A(m,n)$	$A_m \oplus A_n \oplus k$	$sl_{m+1} \otimes sl_{n+1} \otimes k$	$sl^*_{m+1} \otimes sl^*_{n+1} \otimes k$	$(m+n+2)^2 - 1$
$A(n,n)$	$A_n \oplus A_n$	$sl_{n+1} \otimes sl_{n+1}$	$sl^*_{n+1} \otimes sl^*_{n+1}$	$(2n+2)^2 - 2$
$C(n)$	$C_{n-1} \oplus k$	$sp_{2n-2} \otimes k$	$sp^*_{2n-2} \otimes k$	$2n^2 + n - 2$
$P(n)$	A_n	$\Lambda^2 sl^*_{n+1}$	$S^2 sl_{n+1}$	$2(n+1)^2 - 1$

归纳起来，在代数封闭数域上，单李超代数的分类有以下重要定理.

定理 4.1 一个有限维单李超代数，或与单李代数同构，或与 $A(m,n), B(m,n), C(n), D(m,n), F(4), G(3), D(2,1,\alpha), P(n), Q(n), W(n), S(n), \tilde{S}(n), H(n)$ 之一同构.

在单李超代数间，除单李代数间的同构关系外，只有以下同构关系： $A(m,n) \simeq A(n,m)$, $A(1,0) \simeq C(2) \simeq W(2)$, $A(1,1) \simeq H(4)$, $P(2) \simeq S(3)$, $B(0,1) \simeq \tilde{S}(2)$ 和 $D(2,1) \simeq \Gamma(-2,1,1)$.

定理 4.2 一个具有非退化 Killing 型的有限维单李超代数，或与单李代数同构，或与 $m \neq n$ 的 $A(m,n)$, $B(m,n)$, $C(n)$, $m \neq n+1$ 的 $D(m,n)$, $F(4), G(3)$ 之一同构.

因为单李超代数的 Killing 型只能是非退化或恒等于零，所以由定理 4.1 和 4.2 可以得到 Killing 型恒等于零的单李超代数.

4.3 经典李超代数

从第一章知道半单李代数在李代数中起重要作用，上节仅对单李超代数进行了讨论，但并未涉及半单李超代数的问题. 这是因为半单李超代数的分类并没有完成，虽然 Kac 等曾对半单李超代数问题进行过讨论.

对李代数，若李代数 $\mathfrak{g}$ 除 $\mathfrak{g}$ 和 $\{0\}$ 之外，不含任何可解理想，则 $\mathfrak{g}$ 是半单的. 李代数 $\mathfrak{g}$ 半单的充分必要条件是 $\mathfrak{g}$ 为有限个单李代数的直和. 李代数半单的充分必要条件是其 Killing 型非退化. 而对李超代数，若也定义半单李超代数 $\mathfrak{a}$ 为除 $\mathfrak{a}$ 和 $\{0\}$ 之外，不含任何可解理想. 但半单李超代数并不一定可以写成单李超代数的直和，其 Killing 型也不一定是非退化的. 事实上单李超代数的 Killing 型也不一定是非退化的. Killing 非退化基本经典李超代数的一些性质与半单李代数的性质有相当类似，有人也称其为严格半单的.

基本经典李超代数在可以做根分解，有根系，素根系，Cartan 矩阵和 Dynkin 图等方面，与半单李代数也相类似. 本节将着重介绍这些性质.

设 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 是李超代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 的 Cartan 子代数，则称 $\mathfrak{h}$ 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 的 Cartan 子代数.

经典李超代数的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是对角的，设 $\mathfrak{h}$ 的基为 $\{h_1,h_2,\cdots,h_r\}$，则有

$$[h_i,h_j]=0,\qquad i,j=1,2,\cdots,r,$$

$\mathfrak{h}$ 的维数 r 称为李超代数 $\mathfrak{a}$ 的秩. 如经典李超代数可以作以下分

解，称其为根分解.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \oplus_{\alpha\in\mathfrak{h}^*}\ \mathfrak{a}_\alpha \\ \mathfrak{a}_\alpha &= \{x\in\mathfrak{a}|[h,x]=\alpha(h)x,\ \ h\in\mathfrak{h}\}, \end{aligned} \tag{4.23}$$

其中 $\mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间，称为根空间. 集合

$$\Delta=\{\alpha\in\mathfrak{h}^*|\mathfrak{a}_{\alpha\neq 0}\} \tag{4.24}$$

称为 $\mathfrak{a}$ 的根系. 显然 $\Delta=\Delta_0\cup\Delta_1$, Δ_0 是 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 的根系，称为偶根系. Δ_1 是 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 在 $\mathfrak{a}_{\bar{1}}$ 表示的权系，称为奇根系.

设 $\mathfrak{a}$ 是经典李超代数， $\mathfrak{a}=\oplus\mathfrak{a}_\alpha$ 具有如 (4.24) 式的对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根分解，则有

(1) $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{h}$, 即 $\mathfrak{h}$ 就是 $\mathfrak{a}$ 中 0 根的集合， $Q(n)$ 除外;

(2) 除 $A(1,1),P(2),P(3)$ 和 $Q(n)$ 外，当 $\alpha\neq 0$, 有 $\dim\mathfrak{a}_\alpha=1$;

(3) 除 $P(n)$ 和 $Q(n)$ 外， $\mathfrak{a}$ 上只存在一个可差常数因子的，非退化超对称的不变双线型 (,);

(4) $\Delta_{\bar{0}}$ 和 $\Delta_{\bar{1}}$ 在 $\mathfrak{a}_{\bar{0}}$ 的 Weyl 群作用下不变.

若 $\mathfrak{a}$ 是除 $A(1,1)$ 之外的基本经典李超代数，则还有下述性质

(1) $\langle\mathfrak{a}_\alpha,\mathfrak{a}_\beta\rangle\neq 0$, 当且仅当 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$;

(2) 双线型 $(\mathfrak{a}_\alpha,\mathfrak{a}_\beta)=0$, 当 $\alpha\neq-\beta$, 而双线型 (,) 决定一个 $\mathfrak{a}_\alpha$ 和 $\mathfrak{a}_{-\alpha}$ 对;

(3) $\langle e_\alpha,e_{-\alpha}\rangle=(e_\alpha,e_{-\alpha})h_\alpha$, h_α 是由 $[h_\alpha,h]=\alpha(h)$, $h\in\mathfrak{h}$ 决定的非零向量;

(4) 若 $\alpha\in\Delta$, 必有 $-\alpha\in\Delta$;

(5) 当 $\alpha\in\Delta_0$ 时，若 $k\alpha\in\Delta$, 只可能 $k=0,\pm1$, 当 $\alpha\in\Delta_1$ 时，若 $k\alpha\in\Delta$, 除 $k=0,\pm1$ 外，还可能 $k=\pm2$, 并且 $\pm2\alpha\in\Delta_0$;

(6) 当 $\Delta_1\neq 0$ 时， $\Delta_0\cap\Delta_1=\emptyset$.

除去一些例外之后，可以看到基本经典李超代数的根分解，与节 1.2 中半单李代数的根分解有许多类似之处. 如零根由 Cartan

子代数给出，全部根是单根，有正根必有负根，等等．当然也有不同之处，如 $\pm 2\alpha$ 有可能是根，等等．

对李超代数也可以引入素根和 Cartan 矩阵．设李超代数 $\mathfrak{a}$ 的秩为 r, 若存在根系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} \subseteq \Delta$, 对应 Cartan 子代数基 $\{h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}, \cdots, h_{\alpha_r}\}$, 有 $e_\alpha \in \mathfrak{a}_\alpha$, $e_{-\alpha} \in \mathfrak{a}_{-\alpha}$ 满足

$$\begin{aligned}
&[h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}] = 0, \\
&[h_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}] = a_{i\,j} e_{\alpha_j}, \\
&[h_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = -a_{i\,j} e_{-\alpha_j}, \\
&\langle e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j} \rangle = \delta_{i\,j} h_{\alpha_i},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

且 $e_{\pm\alpha_i}$, $i = 1, 2, \cdots, r$ 是生成 $\mathfrak{a}$ 的最小集合，则称 Π 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 的素根系．

其中 $a_{i\,j} = \alpha_j(h_{\alpha_i})$, 矩阵 $(a_{i\,j})$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的 Cartan 矩阵．适当选取 h_{α_i} 和 $e_{\pm\alpha_i}$, 规定当 $\alpha_i \in \Delta_0$ 时， $a_{i\,i} = 2$, 当 $\alpha_i \in \Delta_1$ 时， $a_{i\,i} = 2$, 或 0, 且 $a_{i\,i} = 0$ 时，有 $a_{i\,i+1} = 1$.

与半单李代数相似，Kac 引入了基本经典李超代数的 Dynkin 图，以描述它们的结构．在基本经典李超代数的 Dynkin 图中，也用小圆圈表示素根，为了区分偶根和奇根，用空心圆 (白点) 代表偶根，用实心圆 (黑点) 和有叉的圆 (灰点) 代表奇根．若第 i 个根是奇根，其相应的 Cartan 矩阵元 $a_{i\,i} = 2$, 则第 i 个根用实心圆表示，如其相应的 Cartan 矩阵元 $a_{i\,i} = 0$, 则第 i 个根用有叉圆表示．除 $D(2,1,\alpha)$ 外，第 i 个素根与第 j 个素根用 $|a_{i\,j} a_{j\,i}|$ 条线相连接，若 $a_{i\,j} = a_{j\,i} = 0$, 则第 i 个根与第 j 个根不相连接．当 $|a_{i\,j}| < |a_{j\,i}|$ 时，图上应画箭头，箭头指向第 i 个根．

Kac 还在基本经典李超代数的 Dynkin 图上，在每个素根上面标出最高根所包含该素根的次数．以下所画的 Dynkin 图，也按 Kac 的画法标上最高根．

已知在等价原则下，可以选取只含一个奇根的素根组，所以下面按照 Kac 的惯例，逐个给出基本经典李超代数的根系，素根

系， Cartan 矩阵和 Dynkin 图.

设 D 是对角矩阵组成的空间， $\mathfrak{h}\subseteq D$, D 的对偶空间为 D^*. $\{\cdots,\epsilon_i,\cdots\}$ 是 D^* 的一组基，则基本经典李超代数的根系可以用这组基表示出来. 用 Δ_0' 表示 Δ_0 中的非零根.

$A(m,n)$ 的根系

根可表为 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{m+1}$ 和 $\delta_1=\epsilon_{m+2},\cdots,\delta_{n+1}=\epsilon_{m+n+2}$ 的线性函数. 经典李超代数 $A(m,n)$ 的秩为 $m+n+1$, 所以有 $m+n+1$ 个素根. 其根系为

$$\begin{aligned}&\Delta_0'=\{\epsilon_i-\epsilon_j,\ \delta_k-\delta_l\},\qquad i\neq j,\ \ k\neq l,\\&\Delta_1=\{\pm(\epsilon_i-\delta_k)\},\end{aligned}\tag{4.26}$$

其中 $i,j=1,\cdots,m+1,\ \ k,l=1,\cdots,n+1$. 其素根系为

$$\begin{aligned}&\{\alpha_1=\epsilon_1-\epsilon_2,\quad\cdots,\quad\alpha_m=\epsilon_m-\epsilon_{m+1},\quad\alpha_{m+1}=\epsilon_{m+1}-\delta_1,\\&\alpha_{m+2}=\delta_1-\delta_2,\quad\cdots,\quad\alpha_{m+n+1}=\delta_n-\delta_{n+1}\},\end{aligned}\tag{4.27a}$$

其中第 $m+1$ 个根是奇根. 图 4.2 给出其 Dynkin 图.

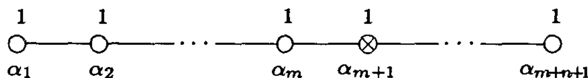


图 4.2 $A(m,n)$ 的 Dynkin 图

设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1, 其余元素为零的 $(m+1)+(n+1)$ 维阶化矩阵，则可将对应素根的生成元用这些矩阵表示出来

$$h_{\alpha_i}=\begin{cases}E_{i\,i}-E_{i+1\,i+1}, & i=1,\cdots,m,m+2,\cdots,m+n+1,\\ E_{m+1\,m+1}+E_{m+2\,m+2}, & i=m+1,\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha_i} &= \begin{cases} E_{i\,i+1}, & i = 1, \cdots, m, m+2, \cdots, m+n+1, \\ E_{m+1\,m+2}, & i = m+1, \end{cases} \\
e_{-\alpha_i} &= \begin{cases} E_{i+1\,i}, & i = 1, \cdots, m, m+2, \cdots, m+n+1, \\ E_{m+2\,m+1}, & i = m+1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.27b}
$$

其 Cartan 矩阵 $A = (a_{i\,j})$ 除 $a_{m+1\,m+1} = 0$ 外，非零的矩阵元有 $a_{i\,i} = 2$, $i = 1, \cdots, m, m+2, \cdots, m+n+1$, $a_{i\,i+1} = a_{i+1\,i} = -1$. 具体为

$$
A = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2
\end{pmatrix}. \tag{4.27c}
$$

$B(m,n)$ 的根系

根可表为 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m$ 和 $\delta_1 = \epsilon_{2m+1}, \cdots, \delta_n = \epsilon_{2m+n}$ 的线性函数. 经典李超代数 $B(m,n)$ 的秩为 $m+n$, 所以有 $m+n$ 个素根. 其根系为

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0' = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j,\ \pm\epsilon_i,\ \pm\delta_k \pm \delta_l,\ \pm 2\delta_k\}, \quad i \neq j,\ k \neq l, \\
&\Delta_1 = \{\pm\epsilon_i \pm \delta_k,\ \pm\delta_k\},
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

其中 $i, j = 1, \cdots, m$, $k, l = 1, \cdots, n$.

当 $m > 0$ 时，其素根系为

$$\{\alpha_1 = \delta_1 - \delta_2, \quad \cdots, \quad \alpha_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_n, \quad \alpha_n = \delta_n - \epsilon_1,$$
$$\alpha_{n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad \cdots, \quad \alpha_{n+m-1} = \epsilon_{m-1} - \epsilon_m \quad \alpha_{n+m} = \epsilon_m\}, \tag{4.29a}$$

其中第 n 个根是奇根. 图 4.3 给出其 Dynkin 图.

设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1, 其余元素为零的 $(2m+1)+2n$ 维阶化矩阵, 则可将对应素根的生成元用这些矩阵表示出来.

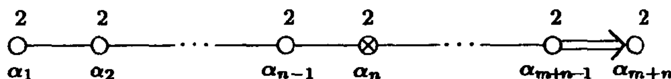


图 4.3 $B(m,n)$ 当 $m>0$ 时的 Dynkin 图

$$h_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{2m+1+i\;2m+1+i} - E_{2m+1+n+i\;2m+1+n+i} \\ \qquad - E_{2m+2+i\;2m+2+i} + E_{2m+2+n+i\;2m+2+n+i}, \\ \qquad i = 1, \cdots, n-1, \\ E_{2m+1+n\;2m+1+n} - E_{2m+1+2n\;2m+1+2n} + E_{1\,1} \\ \qquad - E_{m+1\;m+1}, \quad i = n, \\ E_{i-n\;i-n} - E_{m+i-n\;m+i-n} - E_{i-n+1\;i-n+1} \\ \qquad + E_{m+i-n+1\;m+i-n+1}, \quad i = n+1, \cdots, n+m-1, \\ E_{m\,m} - E_{2m\,2m}, \quad i = n+m, \end{cases}$$

$$e_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{2m+1+i\;2m+2+i} - E_{2m+2+n+i\;2m+1+n+i}, \\ \qquad i = 1, \cdots, n-1, \\ -E_{m+1\;2m+1+2n} + E_{2m+1+n\;1}, \quad i = n, \\ E_{i-n\;i-n+1} - E_{m+i-n+1\;m+i-n}, \\ \qquad i = n+1, \cdots, n+m-1, \\ \sqrt{2}(E_{m\;2m+1} - E_{2m+1\;2m}), \quad i = n+m, \end{cases} \tag{4.29b}$$

$$
e_{-\alpha_i} = \begin{cases} E_{2m+2+i\ 2m+1+i} - E_{2m+1+n+i\ 2m+2+n+i}, \\ \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ E_{1\ 2m+1+n} + E_{2m+1+2n\ m+1}, \quad i = n, \\ E_{i-n+1\ i-n} - E_{m+i-n\ m+i-n+1}, \\ \quad i = n+1, \cdots, n+m-1, \\ \sqrt{2}(-E_{2m\ 2m+1} + E_{2m+1\ m}), \quad i = n+m. \end{cases}
$$

其 Cartan 矩阵 $A = (a_{i\ j})$ 的矩阵元除 $a_{n\ n} = 0$ 外，非零的矩阵元有 $a_{i\ i} = 2,\ \ i = 1, \cdots, n-1, n+1 \cdots, m+n$; $a_{i\ i+1} = -1, i = 1, \cdots, m+n-1$; $a_{i+1\ i} = -1, i = 1, \cdots, m+n-2$; 而 $a_{m+n\ m+n-1} = -2$. Cartan 矩阵为

$$
A = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 2
\end{pmatrix}
\tag{4.29c}
$$

当 $m = 0$ 时，其素根系为

$$
\{\alpha_1 = \delta_1 - \delta_2, \quad \cdots, \quad \alpha_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_n, \quad \alpha_n = \delta_n\}, \tag{4.30a}
$$

其中第 n 个根是奇根. 图 4.4 给出其 Dynkin 图.

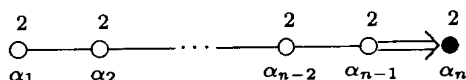


图 4.4 $B(0,n)$ 的 Dynkin 图

设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1, 其余元素为零的 $1+2n$ 维阶化矩阵，则可将对应素根的生成元用这些矩阵表示出来

$$h_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{1+i\,1+i} - E_{1+n+i\,1+n+i} - E_{2+i\,2+i} \\ \qquad + E_{2+n+i\,2+n+i}, \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ 2(E_{1+n\,1+n} - E_{1+2n\,1+2n}), \quad i = n, \end{cases}$$

$$e_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{1+i\,2+i} - E_{2+n+i\,1+n+i}, \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ \sqrt{2}(-E_{1\,1+2n} + E_{1+n\,1}), \quad i = n, \end{cases} \tag{4.30b}$$

$$e_{-\alpha_i} = \begin{cases} E_{2+i\,1+i} - E_{1+n+i\,2+n+i}, \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ \sqrt{2}(E_{1\,1+n} + E_{1+2n\,1}), \quad i = n. \end{cases}$$

其 Cartan 矩阵 $A = (a_{i\,j})$ 为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.30c}$$

非零的矩阵元有 $a_{i\,i} = 2, \ i = 1, \cdots, n$; $a_{i\,i+1} = -1$, $i = 1, \cdots, n-1$; $a_{i+1\,i} = -1$, $i = 1, \cdots, n-2$; 而 $a_{n\,n-1} = -2$.

$D(m,n)$ 的根系

根可表为 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_m$ 和 $\delta_1=\epsilon_{2m+1},\cdots,\delta_n=\epsilon_{2m+n}$ 的线性函数. 经典李超代数 $D(m,n)$ 的秩为 $m+n$, 所以有 $m+n$ 个素根. 其根系为

$$\begin{aligned}\Delta_0' &= \{\pm\epsilon_i\pm\epsilon_j,\ \pm\delta_k\pm\delta_l,\ \pm2\delta_k\}, \quad i\neq j,\ k\neq l,\\ \Delta_1 &= \{\pm\epsilon_i\pm\delta_k\},\end{aligned} \tag{4.31}$$

其中 $i,j=1,\cdots,m,\ k,l=1,\cdots,n$. 其素根系为

$$\begin{aligned}&\{\alpha_1=\delta_1-\delta_2,\quad \cdots,\quad \alpha_{n-1}=\delta_{n-1}-\delta_n,\qquad \alpha_n=\delta_n-\epsilon_1,\\ &\alpha_{n+1}=\epsilon_1-\epsilon_2,\quad \cdots,\quad \alpha_{n+m-1}=\epsilon_{m-1}-\epsilon_m \quad \alpha_{n+m}=\epsilon_{m-1}+\epsilon_m\},\end{aligned} \tag{4.32a}$$

其中第 n 个根是奇根. 图 4.5 给出其 Dynkin 图.

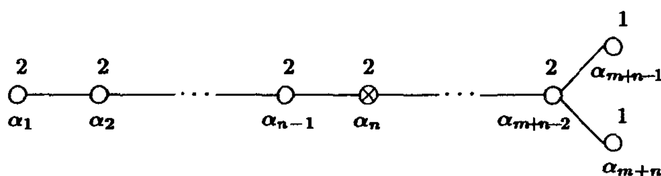


图 4.5 $D(m,n)$ 的 Dynkin 图

设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1, 其余元素为零的 $2m+2n$ 维阶化矩阵, 则可将对应素根的生成元用这些矩阵表示出来

$$h_{\alpha_i}=\begin{cases} E_{2m+i\;2m+i}-E_{2m+n+i\;2m+n+i}-E_{2m+i+1\;2m+i+1}\\ \quad +E_{2m+n+i+1\;2m+n+i+1},\ i=1,\cdots,n-1,\\ E_{2m+n\;2m+n}-E_{2m+2n\;2m+2n}+E_{1\,1}\\ \quad -E_{m+1\;m+1},\quad i=n,\\ E_{i-n\;i-n}-E_{m+i-n\;m+i-n}-E_{i-n+1\;i-n+1}\\ \quad +E_{m+i-n+1\;m+i-n+1},\quad i=n+1,\cdots,n+m-1,\\ E_{m-1\;m-1}-E_{2m-1\;2m-1}+E_{m\;m}\\ \quad -E_{2m\;2m},\quad i=n+m,\end{cases}$$

$$
e_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{2m+i\ 2m+i+1} - E_{2m+n+i+1\ 2m+n+i}, \\ \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ -E_{m+1\ 2m+2n} + E_{2m+n\ 1}, \quad i = n, \\ E_{i-n\ i-n+1} - E_{m+i-n+1\ m+i-n}, \\ \quad i = n+1, \cdots, n+m-1, \\ E_{m-1\ 2m} - E_{m\ 2m-1}, \quad i = n+m, \end{cases} \tag{4.32b}
$$

$$
e_{-\alpha_i} = \begin{cases} E_{2m+i+1\ 2m+i} - E_{2m+n+i\ 2m+n+i+1}, \\ \quad i = 1, \cdots, n-1, \\ E_{1\ 2m+n} + E_{2m+2n\ m+1}, \quad i = n, \\ E_{i-n+1\ i-n} - E_{m+i-n\ m+i-n+1}, \\ \quad i = n+1, \cdots, n+m-1, \\ -E_{2m-1\ m} + E_{2m\ m-1}, \quad i = n+m. \end{cases}
$$

$$
A = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix} \tag{4.32c}
$$

其 Cartan 矩阵 A 由 (4.32c) 式给出． $A = (a_{i\,j})$ 的矩阵元除 $a_{n\,n} = 0, a_{n\,n+1} = 1$ 外，非零的矩阵元有 $a_{i\,i} = 2,\ \ i = 1, \cdots, n-1, n+1, \cdots, m+n$, 当 $i = 1, \cdots, m+n-2$ 时，有 $a_{i\,i+1} = -1$ 和

$a_{i+1\,i} = -1$, 而 $a_{m+n\,m+n-2} = a_{m+n-2\,m+n} = -1$ 和 $a_{m+n-1\,m+n} = a_{m+n\,m+n-1} = 0$.

$C(n)$ 的根系

根可表为 ϵ_1 和 $\delta_1 = \epsilon_3, \cdots, \delta_{n-1} = \epsilon_{n+1}$ 的线性函数. 经典李超代数 $C(n)$ 的秩为 n, 所以有 n 个素根, 其根系为

$$\begin{aligned} \Delta_0' &= \{\pm\delta_k \pm \delta_l \ \pm 2\delta_k\}, \qquad k \neq l, \\ \Delta_1 &= \{\pm\epsilon_1 \pm \delta_k \}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

其中 $k, l = 1, \cdots, n-1$. 其素根系为

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \delta_1, \qquad \alpha_2 = \delta_1 - \delta_2 \quad \cdots, \\ \alpha_{n-1} = \delta_{n-2} - \delta_{n-1}, \quad \alpha_n = 2\delta_{n-1}\}, \end{aligned} \tag{4.34a}$$

其中第 1 个根是奇根. 图 4.6 给出其 Dynkin 图.

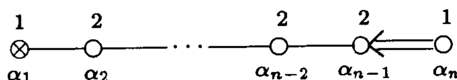


图 4.6 $C(n)$ 的 Dynkin 图

设 $E_{i\,j}$ 是第 i 行第 j 列为 1, 其余元素为零的 $2+(2n-2)$ 维阶化矩阵, 则可将对应素根的生成元用这些矩阵表示出来

$$h_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{1\,1} - E_{2\,2} + E_{3\,3} - E_{n+2\,n+2}, \\ \quad i = 1, \\ E_{1+i\,1+i} - E_{n+i\,n+i} - E_{2+i\,2+i} + E_{n+i+1\,n+i+1}, \\ \quad i = 2, \cdots, n-1, \\ E_{n+1\,n+1} - E_{2n\,2n}, \qquad i = n, \end{cases}$$

$$e_{\alpha_i} = \begin{cases} E_{1\,3} + E_{2+n\,2}, \qquad i = 1, \\ E_{1+i\,2+i} - E_{1+n+i\,n+i}, \qquad i = 2, \cdots, n-1, \\ E_{1+n\,2n} \qquad i = n, \end{cases} \tag{4.34b}$$

$$e_{-\alpha_i} = \begin{cases} -E_{2\,2+n} + E_{3\,1}, & i = 1, \\ E_{2+i\,1+i} - E_{n+i\,1+n+i}, & i = 2, \cdots, n-1, \\ E_{2n\,1+n}, & i = n. \end{cases}$$

其 Cartan 矩阵 $A = (a_{i\,j})$ 除 $a_{1\,1} = 0, a_{1\,2} = 1$ 外，非零的矩阵元有 $a_{i\,i} = 2,\ i = 2, \cdots, n$, $a_{i+1\,i} = -1$, $i = 1, \cdots, n-1$; $a_{i\,i+1} = -1$, $i = 1, \cdots, n-2$; 而 $a_{n-1\,n} = -2$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4.34c}$$

例外李超代数的根系

$D(2,1,\alpha)$ 根可表为 ϵ_1, ϵ_2 和 ϵ_3 的线性函数. 例外李超代数 $D(2,1,\alpha)$ 的秩为 3, 所以有 3 个素根. 其根系为

$$\begin{aligned} &\Delta_0' = \{\pm 2\epsilon_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ &\Delta_1 = \{\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

其素根系为

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \\ \alpha_2 &= -2\epsilon_1, \\ \alpha_3 &= -2\epsilon_2, \} \end{aligned} \tag{4.36}$$

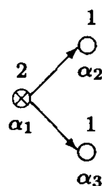


图 4.7 $D(2,1,\alpha)$ 的 Dynkin 图

其中第 1 个根是奇根. 图 4.7 给出其 Dynkin 图.

$F(4)$ 根可表为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (对应 B_3) 和 δ (对应 A_1) 的线性函数. 例外李超代数 $F(4)$ 的秩为 4, 所以有 4 个素根. 其根系为

$$\begin{aligned}\Delta_0' &= \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm\epsilon_i, \pm\delta\},\\ \Delta_1 &= \{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \delta)\},\end{aligned} \tag{4.37}$$

其中 $i \neq j,\ i,j = 1,2,3.$

其素根系为

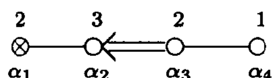


图 4.8 $F(4)$ 的 Dynkin 图

$$\begin{aligned}\{\alpha_1 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \delta),\\ \alpha_2 &= -\epsilon_1,\\ \alpha_3 &= \epsilon_1 - \epsilon_2,\\ \alpha_4 &= \epsilon_2 - \epsilon_3,\}\end{aligned} \tag{4.38}$$

其中第 1 个根是奇根. 图 4.8 给出其 Dynkin 图.

$G(3)$ 根可表为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (对应 G_2, 满足 $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$) 和 δ (对应 A_1) 的线性函数. 例外李超代数 $G(3)$ 的秩为 3, 所以有 3 个素根. 其根系为

$$\begin{aligned}\Delta_0' &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, \pm\epsilon_i, \pm 2\delta\},\\ \Delta_1 &= \{\pm\epsilon_i \pm \delta, \pm\delta\},\end{aligned} \tag{4.39}$$

其中 $i \neq j,\ i,j = 1,2,3.$

其素根系为

$$\begin{aligned}\{\alpha_1 &= \epsilon_1 + \delta,\\ \alpha_2 &= \epsilon_2,\\ \alpha_3 &= \epsilon_3 - \epsilon_2,\}\end{aligned} \tag{4.40}$$

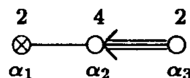


图 4.9 $G(3)$ 的 Dynkin 图

其中第 1 个根是奇根. 图 4.9 给出其 Dynkin 图.

以上已经对基本经典李超代数的根分解作了简单介绍，下面将给出两个具体李超代数的例子.

首先看李超代数 $B(0,1)$, 又称 $osp(1,2)$. 它的秩为 1,Dynkin 图是一个实心小圆圈， Cartan 矩阵为 (2). 它的非零偶根为 $\Delta_0' = \pm 2\delta_1$, 它的奇根为 $\Delta_1 = \pm\delta_1$, 素根为 $\alpha_1 = \delta_1$. 它是维数最小的经典李超代数. 由式 (4.17b) 知其元素 $a \in B(0,1)$ 具有以下 $1+2$ 维阶化矩阵形式

$$a = \begin{pmatrix} 0 & z & z_1 \\ -z_1 & d & e \\ z & f & -d \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

用 $E_{i\,j}$ 代表第 i 行第 j 列为 1, 其余元素为零的 $1+2$ 维阶化矩阵，则 $B(0,1)$ 的基可以取为

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{1}{2}(E_{2\,2} - E_{3\,3}), \\ L_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}E_{3\,2}, \\ L_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}E_{2\,3}, \\ V_{1/2} &= E_{1\,2} + E_{3\,1}, \\ V_{-1/2} &= E_{2\,1} - E_{1\,3}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

相应于素根的生成元为 $h_{\delta_1} = -4L_0$, $e_{\delta_1} = \sqrt{2}V_{-1/2}$, $e_{-\delta_1} = \sqrt{2}V_{1/2}$. 而生成元 $L_{\pm1}$ 对应根 $\mp 2\delta_1$. 生成元间满足以下对易关系和反对易关系

$$(1) \quad \begin{cases} [L_0, L_{\pm1}] = \pm L_{\pm1}, \\ [L_{+1}, L_{-1}] = -L_0, \end{cases}$$

$$
(2)\quad \begin{cases} [L_0, V_{\pm 1/2}] = \pm\dfrac{1}{2} V_{\pm 1/2}, \\ [L_{\pm 1}, V_{\pm 1/2}] = 0, \\ [L_{\pm 1}, V_{\mp 1/2}] = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} V_{\pm 1/2}, \end{cases} \tag{4.43}
$$

$$
(3)\quad \begin{cases} \{V_{\pm 1/2}, V_{\pm 1/2}\} = -2\sqrt{2} L_{\pm 1}, \\ \{V_{1/2}, V_{-1/2}\} = -2L_0. \end{cases}
$$

其中对易关系 (1) 说明偶元 $L_0, L_{\pm 1}$ 构成李代数 $so(3)$, 对易关系 (2) 说明奇元是 $so(3)$ 的 1/2 秩不可约张量, 对易关系 (3) 给出奇元乘奇元到偶元的同态映射. 以后将看到在李超代数中与李代数中一样, 用张量基求表示是方便的.

选基顺序为 $(L_{-1}, L_0, L_{+1}, V_{-1/2}, V_{1/2})$, 则伴随表示为 5×5 的阶化矩阵, 即

$$
\mathrm{ad}(L_{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathrm{ad}(L_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{4.44a}
$$

$$
\mathrm{ad}(L_{+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},
$$

$$\mathrm{ad}(V_{1/2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(4.44b)

$$\mathrm{ad}(V_{-1/2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Killing 型及 Killing 型的逆分别为

$$(g_{\mu\,\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.45a}$$

$$(g^{\mu\,\nu}) = (g_{\mu\,\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.45b}$$

再看李超代数 $D(2,1)$ 的例子. 它的秩为 3, 它的 Dynkin 图

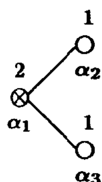


图 4.10 $D(2,1)$ 的 Dynkin 图

见图 4.10. Cartan 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

它的非零偶根为

$$\Delta'_0 = \{\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2, \pm 2\delta_1\},$$

它的奇根为 $\Delta_1 = \{\pm\epsilon_1 \pm\delta_1, \pm\epsilon_2 \pm\delta_1\}$, 素根为 $\alpha_1 = \delta_1 - \epsilon_1, \alpha_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. 它是维数为 17. 由式 (4.18b) 知其元素 $a \in D(2,1)$ 具有以下 $4+2$ 维阶化矩阵形式

$$a = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & b & x & x_1 \\ w_{21} & w_{22} & -b & 0 & x' & x'_1 \\ 0 & c & -w_{11} & -w_{21} & y & y_1 \\ -c & 0 & -w_{12} & -w_{22} & y' & y'_1 \\ -y_1 & -y'_1 & -x_1 & -x'_1 & d & e \\ y & y' & x & x' & f & -d \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

用 $E_{i\,j}$ 代表第 i 行第 j 列为 1, 其余元素为零的 $4+2$ 维阶化矩阵, 则 $D(2,1)$ 的 Cartan 子代数可以取为

$$\begin{aligned} H_1 &= E_{1\,1} - E_{3\,3}, \\ H_2 &= E_{2\,2} - E_{4\,4}, \\ H_3 &= E_{5\,5} - E_{6\,6}, \end{aligned} \tag{4.48a}$$

其他偶元为

$$\begin{aligned} E_{\epsilon_1+\epsilon_2} &= E_{1\,4} - E_{2\,3}, \\ E_{-\epsilon_1-\epsilon_2} &= E_{3\,2} - E_{4\,1}, \\ E_{\epsilon_1-\epsilon_2} &= E_{1\,2} - E_{4\,3}, \\ E_{-\epsilon_1+\epsilon_2} &= E_{2\,1} - E_{3\,4}, \\ E_{2\delta_1} &= E_{5\,6}, \\ E_{-2\delta_1} &= E_{6\,5}, \end{aligned} \tag{4.48b}$$

奇元为

$$
\begin{aligned}
E_{\epsilon_1+\delta_1} &= E_{1\,6} - E_{5\,3}, \\
E_{-\epsilon_1-\delta_1} &= E_{3\,5} + E_{6\,1}, \\
E_{\epsilon_1-\delta_1} &= E_{1\,5} + E_{6\,3}, \\
E_{-\epsilon_1+\delta_1} &= E_{3\,6} - E_{5\,1}, \\
E_{\epsilon_2+\delta_1} &= E_{2\,6} - E_{5\,4}, \\
E_{-\epsilon_2-\delta_1} &= E_{4\,5} + E_{6\,2}, \\
E_{\epsilon_2-\delta_1} &= E_{2\,5} + E_{6\,4}, \\
E_{-\epsilon_2+\delta_1} &= E_{4\,6} - E_{5\,2}.
\end{aligned} \tag{4.48c}
$$

相应于素根的生成元为

$$
\begin{aligned}
h_{\alpha_1} &= E_{1\,1} - E_{3\,3} + E_{5\,5} - E_{6\,6}, \\
h_{\alpha_2} &= E_{1\,1} - E_{2\,2} - E_{3\,3} + E_{4\,4}, \\
h_{\alpha_3} &= E_{1\,1} + E_{2\,2} - E_{3\,3} - E_{4\,4}, \\
e_{\alpha_1} &= -E_{3\,6} + E_{5\,1}, \\
e_{-\alpha_1} &= E_{1\,5} + E_{6\,3}, \\
e_{\alpha_2} &= E_{1\,2} - E_{4\,3}, \\
e_{-\alpha_2} &= E_{2\,1} - E_{3\,4}, \\
e_{\alpha_3} &= E_{1\,4} - E_{2\,3}, \\
e_{-\alpha_3} &= -E_{3\,2} + E_{4\,1}.
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

生成元间满足的对易关系和反对易关系，可以由相应的 $E_{i\,j}$ 间对易关系和反对易关系给出. 从对易关系和反对易关系可以得到伴随表示，由伴随表示可以求出 Killing 型等，此处不再详述.

4.4 经典李超代数的不可约表示

在本节中首先给出李超代数表示的定义及基本性质，然后给出基本经典李超代数有限维不可约表示的基本性质，最后以 $B(0,1)$ 的不可约表示作为简单实例.

4.4.1 表示定义及基本性质

设 $l(V)$ 是阶化线性空间 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 上的线性变换构成的李超代数，即是一般线性李超代数 $pl(V)$ 的子代数， $l(V)\subset pl(V)$. 若存在由李超代数 $\mathfrak{a}$ 到 $l(V)$ 的同态 (偶) 映射 ρ, 即保持李超代数的运算规律不变，对 $z_1,z_2\in\mathfrak{a}$, $c_1,c_2\in K$, $\alpha\in Z_2$ 有

$$\begin{aligned}&(1)\quad \rho:\mathfrak{a}_\alpha\longrightarrow l(V)_\alpha,\\&(2)\quad \rho(c_1z_1+c_2z_2)=c_1\rho(z_1)+c_2\rho(z_2),\\&(3)\quad \rho(\langle z_1,z_2\rangle)=\langle\rho(z_1),\rho(z_2)\rangle,\end{aligned}\tag{4.50}$$

则称 ρ 为李超代数 $\mathfrak{a}$ 的一个 (线性) 表示. V 称为表示空间，设 $V_{\bar{0}}$ 和 $V_{\bar{1}}$ 的维数为 m 和 n, 则表示的维数为 $m+n$.

如取李超代数 $\mathfrak{a}$ 本身为表示空间，对 $z_1,z_2\in\mathfrak{a}$, 定义同态映射 ρ 为

$$\rho(z_1)z_2=\mathrm{ad}(z_1)z_2=\langle z_1,z_2\rangle,$$

则 ρ 为 $\mathfrak{a}$ 的一个线性表示，称为伴随表示.

与李代数表示一样，对李超代数表示也可以引入可约和不可约表示等概念. 设李超代数 $\mathfrak{a}$ 的表示空间 V 存在 $\mathfrak{a}$ 不变的阶化子空间 $W\subset V$, 即对任意 $z\in\mathfrak{a}$, 有 $\rho(z)W\subseteq W$, 则称表示 ρ 是可约表示. 当 ρ 是可约表示时，如不变阶化子空间 W 的补空间 W' 也是 $\mathfrak{a}$ 的不变子空间，则称 ρ 是完全可约表示；当 W' 不是不变子空间时，则称 ρ 是可约而不完全可约表示. 当 V 中不存在 $\mathfrak{a}$ 的任何不变子空间时，则称 ρ 是不可约表示.

Schur引理: 设 ρ 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 在阶化空间 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 上的一个不可约表示，则与全部 $\rho(\mathfrak{a})$ 可超交换的 V 上线性变换 $C(\rho)=\{a\in pl(V)|\langle a,\rho(\mathfrak{a})\rangle=0\}$ 或为

$$C(\rho)=cE_V,\ \ c\in K,$$

其中 E_V 为 V 上恒等变换，或当 $\dim V_{\bar{0}} = \dim V_{\bar{1}} = n$ 时，为

$$C(\rho) = c\begin{pmatrix} E_{n\times n} & b \\ b^{-1} & E_{n\times n} \end{pmatrix}, \quad c \in K,$$

其中 $E_{n\times n}$ 为 $V_{\bar{0}}$ 和 $V_{\bar{1}}$ 上恒等变换，b 是其上非奇异变换，它的逆为 b^{-1}.

可以看到李超代数的 Schur 引理与李代数的 Schur 引理不同，与不可约表示可以超交换的不仅仅是恒等变换. 这与李超代数的表示空间是阶化的有密切关系，可以通过直接计算阶化空间矩阵的对易和反对易关系看出来.

例 李超代数 $N = N_{\bar{0}} \oplus N_{\bar{1}}$ 的表示，其中 $N_{\bar{0}} = \{e\}$, $N_{\bar{1}} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$, 对 $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 满足

$$\begin{aligned} &[e,e] = [e,a_i] = [e,b_i] = 0, \\ &\{a_i, a_j\} = \{b_i, b_j\} = 0, \\ &\{a_i, b_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ e, & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

N 在以 Grassmann 超代数 $\Lambda(n) = \Lambda_{\bar{0}}(n) \oplus \Lambda_{\bar{1}}(n)$ 为表示空间时，对 $u \in \Lambda(n)$, 有含复参数 α 的表示 ρ_α 满足

$$\begin{cases} \rho_\alpha(e)u = \alpha u, \\ \rho_\alpha(a_i)u = \dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}, \\ \rho_\alpha(b_i)u = \alpha \xi_i u. \end{cases}$$

此时奇偶表示空间均为 2^{n-1} 维，注意 $(\dfrac{\partial}{\partial \xi_i}\xi_i + \xi_i \dfrac{\partial}{\partial \xi_i})u = u$, 而 $i \neq j$ 时，$(\dfrac{\partial}{\partial \xi_i}\xi_j + \xi_j \dfrac{\partial}{\partial \xi_i})u = 0$, 设 E 为 2^{n-1} 维恒等矩阵，ξ_i 等于 $\xi_i E$ 等等，可得表示矩阵为

$$\rho_\alpha(e) = \alpha \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\rho_\alpha(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_\alpha(b_i) = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \xi_i \\ \xi_i & 0 \end{pmatrix}.$$

表示 ρ_α 是 2^n 维不可约表示. 与此不可约表示全部阶化矩阵可超交换只有恒等变换.

例 李超代数 $N' = N \oplus \{d\}$, 即 N' 由上例中 N 和奇空间 $\{d\}$ 直和而成, 满足 $\langle N, d \rangle = 0$ 和 $\{d, d\} = e$. 设 $\deg \epsilon = 1$, $\epsilon^2 = \alpha/2$, α 为复数, 记由 ϵ 生成的超代数为 $k[\epsilon]$, k 为复数, 则由 Grassmann 超代数和 $k[\epsilon]$ 的直积而成的超代数 $\Lambda'(n) = \Lambda(n) \otimes k[\epsilon]$, 可作为 N' 的表示空间. 则 N' 有含复参数 α 的表示 ρ'_α, 对 $u \in \Lambda(n)$, $v \in k[\epsilon]$, $h \in N$ 定义

$$\rho'_\alpha(h) u \otimes v = (\rho'_\alpha(h) u) \otimes v.$$

$$\rho'_\alpha(d) u \otimes v = (E \otimes \epsilon)(u \otimes v) = \begin{cases} u \otimes (\epsilon v), & u \in \Lambda_{\bar{0}}(n), \\ -u \otimes (\epsilon v), & u \in \Lambda_{\bar{1}}(n). \end{cases}$$

可得 ρ'_α 为 $\Lambda'(n)$ 的表示. 若取 $\Lambda'(n)$ 的基为

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{\bar{0}}(n) \\ \Lambda_{\bar{1}}(n) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{\bar{0}}(n) \\ \Lambda_{\bar{1}}(n)\epsilon \\ \Lambda_{\bar{0}}(n)\epsilon \\ \Lambda_{\bar{1}}(n) \end{pmatrix}.$$

则表示矩阵为

$$
\rho'_\alpha(e) = \alpha \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},
$$

$$
\rho'_\alpha(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \xi_i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\rho'_\alpha(b_i) = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi_i \\ 0 & 0 & \xi_i & 0 \\ 0 & \xi_i & 0 & 0 \\ \xi_i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\rho'_\alpha(d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha/2 \\ \alpha/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

可以看出 ρ'_α 是 N' 的 2^{n+1} 维不可约表示. 注意 ϵ 与 ξ_i 反对易, 除恒等变换可与全部 ρ'_α 超交换外, 还有矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

可以和全部 ρ'_α 超交换. 这正是李超代数 Schur 引理所给出的另一种情况.

当李超代数 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 型不退化，即 $\det|g_{\mu\,\nu}| \neq 0$，设 $(g_{\mu\,\nu})$ 的逆矩阵为 $(g^{\mu\,\nu})$. 可以定义 $\mathfrak{a}$ 在表示 ρ 的 Casimir 算子为

$$\begin{aligned} C_2 &= \sum_{\mu\,\nu} g^{\mu\,\nu} \rho(z_\mu)\rho(z_\nu) \\ &= \sum_{i\,j} g^{i\,j} \rho(x_i)\rho(x_j) + \sum_{\alpha\,\beta} g^{\alpha\,\beta} \rho(y_\alpha)\rho(y_\beta), \end{aligned} \tag{4.51}$$

其中 $z_\mu \in \mathfrak{a}$, $x_i \in \mathfrak{a}_{\bar{0}}$, $y_\alpha \in \mathfrak{a}_{\bar{1}}$. 当 $\mathfrak{a}$ 是由超代数诱导而来时，可以直接定义 Casimir 算子为

$$\begin{aligned} C_2 &= \sum_{\mu\,\nu} g^{\mu\,\nu} z_\mu z_\nu \\ &= \sum_{i\,j} g^{i\,j} x_i x_j + \sum_{\alpha\,\beta} g^{\alpha\,\beta} y_\alpha y_\beta, \end{aligned} \tag{4.51'}$$

Casimir 算子可以和所有 $\mathfrak{a}$ 的元素对易，是 $\mathfrak{a}$ 的不变量.

4.4.2 基本经典李超代数表示的权分解

已知基本经典李超代数 $\mathfrak{a}$ 可作 Cartan 根分解，

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha\in\Delta_{\bar{0}}} \mathfrak{a}_{\bar{0}}^{\alpha} \oplus_{\alpha\in\Delta_{\bar{1}}} \mathfrak{a}_{\bar{1}}^{\alpha}$$

在 Chevalley 基下，$\mathfrak{h}$ 的基为 h_{α_i}，满足 $[h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}] = 0$, $\alpha_i \in \Pi$ 是素根，$i,j = 1,\cdots,r$，r 是 $\mathfrak{a}$ 的秩. 与李代数类似，可以引入基本经典李超代数表示权的概念. 设 $\mathfrak{a}$ 在 V 上的表示为 ρ, $(h_{\alpha_1},\cdots,h_{\alpha_r})$ 有共同本征矢. 称共同本征矢为权矢量，共同本征值集合 $\lambda = (\lambda(h_{\alpha_1}),\cdots,\lambda(h_{\alpha_r}))$ 为权. 所有具有权 λ 的本征矢构成 V 的一个子空间，

$$V_\lambda = \{v \in V | \rho(h_{\alpha_i})v = \lambda(h_{\alpha_i})v,\ \ i = 1,\cdots,r\}, \tag{4.52}$$

称 V_λ 为具有权 λ 的表示子空间. 一般讲 V_λ 并不一定是一维的. $\lambda(h_{\alpha_i})$ 是 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的线性泛函，$\lambda(h_{\alpha_i}) \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间，称为权空间.

设 e_{α_i} 和 $e_{-\alpha_i}$ 是 $\mathfrak{a}$ 对应于正素根和负素根的生成元. 其他正根生成元和负根生成元可以分别通过 e_{α_i}, $i=1,2,\cdots,r$ 和 $e_{-\alpha_i}$, $i=1,2,\cdots,r$ 间多次乘法而得到. 为简单起见, 以下将 $\rho(h_{\alpha_i})$, $\rho(e_{\alpha_i})$ 等写成 h_{α_i}, e_{α_i}, 等等. 利用 h_{α_i} 和 e_{α_j} 间对易关系可得

$$h_{\alpha_i}e_{\alpha_j}V_\lambda=(\lambda(h_{\alpha_i})+\alpha_j(h_{\alpha_i}))e_{\alpha_j}V_\lambda.$$

说明 $e_{\alpha_j}V_\lambda$ 属于 V 的权为 $\lambda+\alpha_j$ 的子空间.

对基本经典李超代数可以引入表示 ρ 的最高权的概念

$$\Lambda=(\Lambda(h_{\alpha_1}),\cdots,\Lambda(h_{\alpha_r}))=(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r),$$

对任意 $i=1,\cdots,r$, 最高权空间满足

$$\begin{cases} h_{\alpha_i}V_\Lambda=\Lambda_iV_\Lambda, \\ e_{\alpha_i}V_\Lambda=0, \end{cases} \tag{4.53}$$

即最高权不可能再增加.

权的定义并不一定要求取 Chevalley 基, 也可以取 $\mathfrak{h}$ 的基为 $(H_1,\cdots,H_r)$, 同样满足 $[H_i,H_j]=0$, $(H_1,\cdots,H_r)$ 有共同本征矢. 权为 λ 的子空间为

$$V_\lambda=\{v\in V|H_iv=\lambda(H_i)v,\ \ i=1,\cdots,r,\}. \tag{4.52'}$$

同样对具有正根 α 的生成元 E_α, 有

$$H_iE_\alpha V_\lambda=(\lambda(H_i)+\alpha(H_i))E_\alpha V_\lambda,$$

即 $E_\alpha V_\lambda$ 属于权为 $\lambda+\alpha$ 的子空间. 注意 $E_\alpha=\sum_{\alpha_i\in\Pi}k_ie_{\alpha_i}$, k_i 为非负整数. 设表示 ρ 的最高权 $\Lambda=(\Lambda(H_1),\cdots,\Lambda(H_r)=(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r)$, 同样最高权空间有

$$\begin{cases} H_iV_\Lambda=\Lambda_iV_\Lambda, \\ E_\alpha V_\Lambda=0. \end{cases} \tag{4.53'}$$

李超代数的最高权定理：设 $\mathfrak{a}$ 是除 $A(n,n)$ 外的基本经典李超代数，则有

(1) $\mathfrak{a}$ 的任何一个有限维不可约表示 ρ 具有最高权 Λ;

(2) 最高权态 $V_\Lambda \in V$ 是单的，即 V_Λ 为表示空间 V 的一维子空间;

(3) $\mathfrak{a}$ 的两个有限维不可约表示 ρ_1 和 ρ_2 等价的充分必要条件是其最高权 Λ_1 和 Λ_2 相等;

(4) 不可约表示空间可按权空间分解，设 D_Λ 是不可约表示 ρ 的权系，即 $V=\sum_{\lambda\in D_\Lambda}\oplus V_\lambda$.

在 Chevalley 基下， $\Lambda=(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_r)$ 是不可约表示最高权的充分必要条件为：

(1) 当 $\alpha_i\in\Delta_0$ 时， $\Lambda_i\in Z_+$;

(2) 当 $\alpha_s\in\Delta_1$ 时， Λ_s 的可取值为：

(a) 当 $\mathfrak{a}$ 是 1 型基本经典李超代数时，Λ_s 可取任意复数. 因此存在含参数的有限维不可约表示族;

(b) 当 $\mathfrak{a}$ 是 2 型基本经典李超代数时，素根按 4.3 节所给顺序， Λ_s 可取值由表 4.3 给出. 当 $k<b$ 时，还须满足表 4.4 的附加条件.

表 4.3

$\mathfrak{a}$	$k\in Z_+$	b
$B(0,n)$	$\Lambda_n/2$	0
$B(m,n)\ \ m>0$	$\Lambda_n-\Lambda_{n+1}-\cdots-\Lambda_{m+n-1}-\Lambda_{m+n}/2$	m
$D(m,n)$	$\Lambda_n-\Lambda_{n+1}-\cdots-\Lambda_{m+n-2}-(\Lambda_{m+n-1}+\Lambda_{m+n})/2$	m
$D(2,1;\alpha)$	$(1+\alpha)^{-1}(2\Lambda_1-\Lambda_2-\alpha\Lambda_3)$	2
$F(4)$	$(2\Lambda_1-3\Lambda_2-4\Lambda_3-2\Lambda_4)/3$	4
$G(3)$	$(\Lambda_1-2\Lambda_2-3\Lambda_3)/2$	3

可见 2 型基本经典李超代数，不存在含参数的有限维不可约表示族.

表 4.4

$B(m,n)$	$\Lambda_{n+k+1}=\cdots=\Lambda_{m+n}=0,$
$D(m,n)$	$\begin{cases} k\le m-2, & \Lambda_{n+k+1}=\cdots=\Lambda_{m+n}=0, \\ k=m-1, & \Lambda_{m+n-1}=\Lambda_{m+n}, \end{cases}$
$D(2,1;\alpha)$	$\begin{cases} k=0, & \Lambda_i=0,\ i=1,2,3, \\ k=1, & (\Lambda_3+1)\alpha=\pm(\Lambda_2+1), \end{cases}$
$F(4)$	$\begin{cases} k=0,k\neq 1, & \Lambda_i=0,\ i=1,\cdots,4. \\ k=2, & \Lambda_2=\Lambda_4=0, \\ k=3, & \Lambda_2=2\Lambda_4+1, \end{cases}$
$G(3)$	$\begin{cases} k=0,k\neq 1, & \Lambda_i=0,\ i=1,2,3, \\ k=2, & \Lambda_2=0, \end{cases}$

例如 $B(m,n)$, 秩为 $m+n$, 第 n 个根为奇根, 设 k 为非负整数, 最高权的奇分量 Λ_n 满足

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= k+\Lambda_{n+1}+\cdots+\Lambda_{m+n-1}+1/2\Lambda_{m+n}, & k\ge m, \\ \Lambda_n &= k+\Lambda_{n+1}+\cdots+\Lambda_{n+k}, & k<m. \end{aligned}$$

由最高权定理知基本经典李超代数的有限维不可约表示有唯一的最高权, 所以可用最高权标记其有限维不可约表示. 当取 Cartan 子代数不同的基时, 最高权的分量也具有不同的值, 即最高权的分量形式随 Cartan 子代数的基变换而变换.

当然与单李代数不同, 单李超代数存在有限维可约而不完全可约的表示, 它们也有最高权. 所以给出一个最高权, 对应唯一的有限维不可约表示, 但仍可能存在其他有限维可约而不完全可约的表示, 也以此为最高权.

4.4.3 例 $B(0,1)$ 的不可约表示

从 4.3 节知 $B(0,1)$ 的张量基为 $L_0,L_{\pm1},V_{\pm1/2}$, 满足对易和反对易关系式 (4.43).$L_0,L_{\pm1}$ 构成 $so(3)$ 代数, $V_{\pm1/2}$ 构成 $so(3)$ 的

1/2 秩不可约张量. 由于 $B(0,1)$ 是由线性超代数诱导而来，所以 Casimir 算子可以直接写为

$$C_2 = g^{\mu\,\nu} Z_\mu Z_\nu = \frac{2}{3}L^2 + \frac{1}{6}V_{1/2}V_{-1/2} - \frac{1}{6}V_{-1/2}V_{1/2}, \tag{4.54}$$

其中 $L^2 = -L_{-1}L_{+1} - L_{+1}L_{-1} + L_0^2$. 直接计算可以证明 C_2 与生成元 $L_{\pm1}, L_0, V_{\pm1/2}$ 是对易的. 选不可约表示空间的基为 $L^2 = -L_{-1}L_{+1} - L_{+1}L_{-1} + {L_0}^2$ 和 L_0 的共同本征矢 $|\Lambda, K\rangle$,

$$\begin{aligned} L^2|\Lambda, K\rangle &= \Lambda(\Lambda+1)|\Lambda, K\rangle, \\ L_0|\Lambda, K\rangle &= k|\Lambda, K\rangle. \end{aligned} \tag{4.55}$$

$L_0, L_{\pm1}$ 在这基下的矩阵元已知,

$$\langle\Lambda', K'|L_0|\Lambda, K\rangle = \delta_{\Lambda'\,\Lambda}\delta_{K'\,K}K, \tag{4.56a}$$

$$\langle\Lambda', K'|L_{\pm1}|\Lambda, K\rangle = \delta_{\Lambda'\,\Lambda}\delta_{K'\,K\pm1} \mp \sqrt{(\Lambda\mp K)(\Lambda\pm K+1)/2}. \tag{4.56b}$$

利用 $V_{\pm1/2}$ 不可约张量性质，定义约化矩阵元为

$$\langle\Lambda', K'|V_q|\Lambda, K\rangle = \sqrt{\frac{1}{2\Lambda'+1}}\langle\Lambda\; K\; 1/2\;\; q|\Lambda'\; K'\rangle\langle\Lambda'\|V\|\Lambda\rangle, \tag{4.57}$$

其中 $\langle\Lambda\; K\; 1/2\; q|\Lambda' K'\rangle$ 是 $so(3)$ 的 Clebsch-Gordon 系数，$\langle\Lambda'\|V\|\Lambda\rangle$ 是 V 的约化矩阵元. 利用式 (4.43) 中 V 和 V 间反对易关系，可得约化矩阵元满足的齐次方程和非齐次方程如下

$$\begin{aligned} \langle\Lambda+1\|V\|\Lambda+1/2\rangle\langle\Lambda+1/2\|V\|\Lambda\rangle = 0, \\ \langle\Lambda-1\|V\|\Lambda-1/2\rangle\langle\Lambda-1/2\|V\|\Lambda\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} &(\Lambda+1)\langle\Lambda\|V\|\Lambda-1/2\rangle\langle\Lambda-1/2\|V\|\Lambda\rangle \\ &\quad + \Lambda\langle\Lambda\|V\|\Lambda+1/2\rangle\langle\Lambda+1/2\|V\|\Lambda\rangle \\ &= -2\Lambda(\Lambda+1)(2\Lambda+1). \end{aligned} \tag{4.59}$$

$B(0,1)$ 的正根生成元为 L_{+1} 和 $V_{1/2}$, 其最高权态 $|\hat{\Lambda},\hat{K}\rangle$ 满足

$$\begin{aligned}L_{+1}|\hat{\Lambda},\hat{K}\rangle &= 0,\\ V_{1/2}|\hat{\Lambda},\hat{K}\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{4.60}$$

由此可解出 $\hat{K}=\hat{\Lambda}$, 并且 $\hat{\Lambda}$ 是此不可约表示空间 Λ 的最大值, 即最高权态为 $|\hat{\Lambda},\hat{\Lambda}\rangle$, 可用 $(\hat{\Lambda})$ 标记此不可约表示. 由 $\langle\hat{\Lambda}+1/2\|V\|\hat{\Lambda}\rangle=0$ 和式 (4.59) 可得

$$\langle\hat{\Lambda}\|V\|\hat{\Lambda}-1/2\rangle\langle\hat{\Lambda}-1/2\|V\|\hat{\Lambda}\rangle=-2\hat{\Lambda}(2\hat{\Lambda}+1). \tag{4.61}$$

由齐次方程可以看出如果当 $\langle\hat{\Lambda}-1/2\|V\|\hat{\Lambda}\rangle\neq 0$ 时, 必定会有 $\langle\hat{\Lambda}-1\|V\|\hat{\Lambda}-1/2\rangle=0$, 所以此不可约表示空间只存在 $\hat{\Lambda}$ 和 $\hat{\Lambda}-1/2$ 两个子空间.

适当选择相因子, 可取

$$\langle\hat{\Lambda}\|V\|\hat{\Lambda}-1/2\rangle=-\langle\hat{\Lambda}-1/2\|V\|\hat{\Lambda}\rangle=\sqrt{2\hat{\Lambda}(2\hat{\Lambda}+1)}.$$

代入 CG 系数可得

$$\begin{aligned}\langle\hat{\Lambda}-1/2\ \ K+1/2|V_{1/2}|\hat{\Lambda}\ \ K\rangle &= \sqrt{\hat{\Lambda}-K},\\ \langle\hat{\Lambda}\ \ K+1/2|V_{1/2}|\hat{\Lambda}-1/2\ \ K\rangle &= \sqrt{\hat{\Lambda}+K+1/2},\\ \langle\hat{\Lambda}-1/2\ \ K-1/2|V_{-1/2}|\hat{\Lambda}\ \ K\rangle &= -\sqrt{\hat{\Lambda}+K},\\ \langle\hat{\Lambda}\ \ K-1/2|V_{-1/2}|\hat{\Lambda}-1/2\ \ K\rangle &= \sqrt{\hat{\Lambda}-K+1/2}.\end{aligned} \tag{4.62}$$

在不可约表示 $(\hat{\Lambda})$ 中, 用 $\hat{\Lambda}$ 和 $\hat{\Lambda}-1/2$ 代入式 (4.56), 加上式 (4.62) 可得生成元的全部矩阵元, 也就是得到了表示矩阵.

$B(0,1)$ 的 Chevalley 基为 $h_{\alpha_1}=4L_0$, $e_{\alpha_1}=\sqrt{2}V_{1/2}$, $e_{-\alpha_1}=\sqrt{2}V_{-1/2}$. 根据基本经典李超代数最高权的充分必要条件, 知 $h_{\alpha_1}/2$ 的本征值为非负整数, 所以最高权 $\hat{\Lambda}$ 的取值范围为 $0,1/2,\ 1,3/2,\ \cdots$, 等整数和半整数.

从上讨论可以看出，$B(0,1)$ 具有最高权的表示都是不可约的，也就是完全可约的. 这在单李超代数中是特殊的，这可以从下定理看出.

定理：李超代数 $\mathfrak{a}$ 的全部有限维表示完全可约的充分必要条件为 $\mathfrak{a}$ 是半单李代数和有限个 $B(0,n)$ 的直和.

4.5 经典李超代数的星表示和阶化星表示

已知群在内积空间的酉表示可约则完全可约，当然李群的酉表示也是可约则完全可约. 李群的局域性质由李代数给出. 李群的酉表示对应李代数在内积空间的厄米表示（或反厄米表示，如果取指数映射不含 i). 李代数的厄米表示 (也称星表示) 可约则完全可约. Scheunert 等讨论了把李代数的厄米表示推广到经典李超代数，称为经典李超代数的星表示和阶化星表示. 下面简单介绍其结果和 $B(0,1)$ 实例.

4.5.1 李超代数的共轭运算和阶化共轭运算

由节 1.3 知李代数的共轭运算满足条件 (1.67). 对经典李超代数 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{\bar{0}}\oplus\mathfrak{a}_{\bar{1}}$，如要求推广共轭映射 $\sigma:\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ 满足以下条件：

(1) $\sigma:\mathfrak{a}_\alpha\to\mathfrak{a}_\alpha,\ \alpha\in Z_2$ 并且是可加映射；

(2) 对 $Q\in\mathfrak{a}_{\bar{0}}$，推广共轭映射就是李代数的共轭映射，即 $Q\to Q^\dagger$；

(3) 对 $U,V\in\mathfrak{a}_{\bar{1}}$，$a,b\in C$，要求 $\sigma(aU+bV)=a^*\sigma(U)+b^*\sigma(V)$，且有逆映射 σ^{-1} 存在，$\sigma^{-1}(aU+bV)=a^*\sigma^{-1}(U)+b^*\sigma^{-1}(V)$；

(4) 对 $Q\in\mathfrak{a}_{\bar{0}}$，$U\in\mathfrak{a}_{\bar{1}}$，要求对奇元和偶元的映射协调，即 $\sigma([Q,U])=-[Q^\dagger,\sigma(U)]$.

Scheunert 等证明只有下列共轭运算 (用 † 代表) 和阶化共轭运算 (用 ‡ 代表) 满足上述条件. 对 $A,B\in\mathfrak{a}$，$a,b\in C$，共轭运算满足：

(1) 偶元 (奇元) 的共轭为偶元 (奇元);

(2) $(aA+bB)^\dagger = a^*A^\dagger + b^*B^\dagger$;

(3) $\langle A,B\rangle^\dagger = \langle B^\dagger, A^\dagger\rangle$;

(4) $(A^\dagger)^\dagger = A$.

阶化共轭运算满足:

(1) 偶元 (奇元) 的阶化共轭为偶元 (奇元);

(2) $(aA+bB)^\ddagger = a^*A^\ddagger + b^*B^\ddagger$;

(3) $\langle A,B\rangle^\ddagger = (-)^{\deg A \deg B}\langle B^\ddagger, A^\ddagger\rangle$;

(4) $(A^\ddagger)^\ddagger = (-)^{\deg A}A$.

有了共轭运算和阶化共轭运算便可以讨论星表示的推广.

4.5.2 李超代数的星表示和阶化星表示

李代数的星表示空间是内积空间 (Hibert 空间), 所以要推广星表示首先要推广内积概念到阶化空间. 设 $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ 是阶化空间, 内积 $\langle x|y\rangle$ 是 x, y 的有序函数, 满足:

(1) $\langle ax+y|z\rangle = a\langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$, 对 $x, y, z \in V$, $a \in C$;

(2) $\langle x|y\rangle = (\langle y|x\rangle)^*$, 所以有 $\langle z|ax+y\rangle = a^*\langle z|x\rangle + \langle z|y\rangle$, 对 $x, y, z \in V$, $a \in C$;

(3) $\langle x|x\rangle > 0$, 对 $x \in V$, 且 $x \neq 0$;

(4) 当 $x \in V_{\bar 0}$, $y \in V_{\bar 1}$ 时, 有 $\langle x|y\rangle = 0$.

可以看出只有第 (4) 点是阶化空间特有的, 其余与非阶化内积空间是一样的.

设 $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ 是阶化内积空间, A 是 V 上线性变换, 对 $x, y \in V$, 定义

$$\langle A^\dagger x|y\rangle = \langle x|Ay\rangle, \tag{4.63}$$

利用阶化内积空间的性质, 通过直接计算, 可以看出这定义完全满足上述共轭运算的条件. 如果取 $(e_1, \cdots, e_m)$ 和 $(e_{m+1}, \cdots, e_{m+n})$ 为 $V_{\bar 0}$ 和 $V_{\bar 1}$ 的基, 设 A 在这基下矩阵元为 $A_{i\,j} = \langle e_i|Ae_j\rangle$, 则 $A^\dagger$ 的

矩阵元为

$$A^{\dagger}_{i\ j} = \langle e_i | A^{\dagger} e_j \rangle = A^{*}_{j\ i}. \tag{4.63'}$$

同样，设 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ 是阶化内积空间， A 是 V 上线性变换，对 $x, y \in V$, 定义

$$\langle A^{\ddagger} x | y \rangle = (-)^{\deg A \deg x} \langle x | Ay \rangle, \tag{4.64}$$

特别注意 $V_{\bar{0}}$ 中向量和 $V_{\bar{1}}$ 中向量内积为零，通过直接计算，可以看出这定义完全满足上述阶化共轭运算的条件. 在上述基下 $A^{\ddagger}$ 的矩阵元为

$$A^{\ddagger}_{i\ j} = \langle e_i | A^{\ddagger} e_j \rangle = (-)^{\deg A \deg e_j} A^{*}_{j\ i}, \tag{4.64'}$$

即只有 A 和 e_j 均为奇时，阶化共轭矩阵元才与共轭矩阵元不同.

定义: 设 ρ 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 在阶化内积空间 V 的表示，若对任意 $A \in \mathfrak{a}$, 有 $\rho(A^{\dagger}) = \rho(A)^{\dagger}$, 则称 ρ 为 $\mathfrak{a}$ 的星表示.

定义: 设 ρ 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 在阶化内积空间 V 的表示，若对任意 $A \in \mathfrak{a}$, 有 $\rho(A^{\ddagger}) = \rho(A)^{\ddagger}$, 则称 ρ 为 $\mathfrak{a}$ 的阶化星表示.

下定理给出李超代数的星表示和阶化星表示的完全可约性.

定理: 李超代数在阶化内积空间的星表示和阶化星表示是完全可约的.

证明如下，设 ρ 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 在阶化内积空间 V 的星表示，V 有 ρ 真不变的子空间 W, 则 W 的补空间 W' 满足

$$W' = \{x \in V | \langle x | y \rangle = 0, \ \ y \in W\},$$

由 W 是不变的子空间，对 $y \in W$, 有 $\rho(A)y \in W$, 对 $x \in W'$ 有

$$\langle \rho(A^{\dagger}) x | y \rangle = \langle x | \rho(A) y \rangle = 0,$$

即 $\rho(A^{\dagger})x \in W'$, W' 也是 ρ 不变的. 因此 $V = W \oplus W'$, 表示是完全可约的.

同样可以证明阶化星表示的完全可约性.

设 ρ 和 ρ' 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 的阶化表示，V 和 V' 是相应的表示空间，对 $x \in V$，$x' \in V'$, $A \in \mathfrak{a}$, 在直积空间 $V \otimes V'$ 上直积表示 $\rho \otimes \rho'$ 满足

$$(\rho \otimes \rho')(A)(x \otimes x') = (\rho(A)x) \otimes x' + (-)^{\deg A \deg x}(x \otimes (\rho'(A)x')). \tag{4.65}$$

当 ρ 和 ρ' 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 的星表示时，对 $x, y \in V$, $x', y' \in V'$, 在 $V \otimes V'$ 定义内积为

$$\langle x \otimes x' | y \otimes y' \rangle = \langle x|y \rangle \langle x'|y' \rangle, \tag{4.66}$$

通过直接计算可以证明直积表示 $\rho \otimes \rho'$ 也是星表示.

当 ρ 和 ρ' 是李超代数 $\mathfrak{a}$ 的阶化星表示时，对 $x, y \in V$, $x', y' \in V'$, 仿上办法，定义 $V \otimes V'$ 的内积为

$$\langle x \otimes x' | y \otimes y' \rangle = (-)^{\deg x' \deg y} \langle x|y \rangle \langle x'|y' \rangle. \tag{4.66'}$$

可以看出这内积不是正定的，虽然从它也可形式上算出直积表示 $\rho \otimes \rho'$ 是阶化星表示. 所以说阶化星表示的直积并不一定是阶化星表示，以后将会看到，$su(2/1)$ 阶化星表示的直积就存在不能完全约化为阶化星表示直和的情况.

4.5.3 经典李超代数的星表示和阶化星表示

如存在星表示和阶化星表示，一定要存在共轭运算和阶化共轭运算. 所以我们对每种经典李超代数，首先讨论其共轭运算和阶化共轭运算，然后讨论其星表示和阶化星表示.

由于大部分经典李超代数是一般线性李超代数的子代数，所以先讨论一般线性李超代数的共轭和阶化共轭运算. 一般线性李超代数 $pl(m, n)$ 的偶元和奇元分别具有式 (4.11a) 和 (4.11b) 矩阵形式，根据偶元的推广共轭映射就是相应李代数的共轭映射，所以

$$\sigma \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} A^\dagger & 0 \\ 0 & D^\dagger \end{pmatrix}. \tag{4.67}$$

设 d 为不等于 0 的实参数，奇元的推广共轭映射可以取下面的共轭映射

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & dC^{\dagger} \\ d^{-1}B^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.68}$$

和阶化共轭映射

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -dC^{\dagger} \\ d^{-1}B^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.69}$$

因为李代数共轭运算满足推广共轭映射的条件 (3), 所以它们都满足条件 (3). 直接作矩阵计算可以证明它们对奇元和偶元的映射是协调的，即

$$\begin{aligned}&\sigma\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= -\left[\begin{pmatrix} A^{\dagger} & 0 \\ 0 & D^{\dagger} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm dC^{\dagger} \\ d^{-1}B^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

所以满足推广共轭映射的条件 (4).

当 $d=1$ 时，式 (4.68) 给出普通厄密共轭运算. 设前 m 维空间为偶时，$d=1$, 设前 m 维空间为奇时，$d=-1$, 式 (4.69) 与 (4.64') 给出的矩阵阶化共轭运算一致. 由于 d 可取正负两种符号，所以 $pl(m,n)$ 有含实参数的两类共轭运算和两类阶化共轭运算.

$spl(m,n)$: 它是 $pl(m,n)$ 加上超迹为零条件, 即 $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(D)$, 此并不影响推广共轭映射，所以 $spl(m,n)$ 也有含实参数的两类共轭运算和两类阶化共轭运算. $spl(m,n)$ 有含实参数的两类星表示和两类阶化星表示.

$B(m,n)$: 从 (4.17b) 式知 $B(m,n)$ 的元素可用 $(2m+1+2n)$ 维阶化矩阵代表，偶元的推广共轭映射就是普通的共轭映射，其奇元

为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & y & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & z & z_1 \\ -y_1^{\mathrm{t}} & -x_1^{\mathrm{t}} & -z_1^{\mathrm{t}} & 0 & 0 \\ y^{\mathrm{t}} & x^{\mathrm{t}} & z^{\mathrm{t}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 x, y, x_1, y_1 是 $m\times n$ 维矩阵，z, z_1 是 $1\times n$ 维矩阵. 用式 (4.68) 和 (4.69) 的推广共轭映射作用其上得

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & y & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & z & z_1 \\ -y_1^{\mathrm{t}} & -x_1^{\mathrm{t}} & -z_1^{\mathrm{t}} & 0 & 0 \\ y^{\mathrm{t}} & x^{\mathrm{t}} & z^{\mathrm{t}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mp dy_1^* & \pm dy^* \\ 0 & 0 & 0 & \mp dx_1^* & \pm dx^* \\ 0 & 0 & 0 & \mp dz_1^* & \pm dz^* \\ d^{-1}x^{\dagger} & d^{-1}y^{\dagger} & d^{-1}z^{\dagger} & 0 & 0 \\ d^{-1}x_1^{\dagger} & d^{-1}y_1^{\dagger} & d^{-1}z_1^{\dagger} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

其中上面符号对应共轭运算，下面符号对应阶化共轭运算. 要求映射之后，奇元仍属于 $B(m,n)_{\bar{1}}$, 则必须满足 $-(d^{-1}x^{\dagger})^{\mathrm{t}} = \pm dx^*$, $\cdots$, $(d^{-1}x_1^{\dagger})^{\mathrm{t}} = \mp dx_1^*$, $\cdots$, 从而得到 $d^2 = \mp 1$. 因为 d 为实参数，所以不可能存在共轭运算，只可能在 $d = \pm 1$ 时，存在两种阶化共轭运算. $B(m,n)$ 有两种阶化星表示.

$D(m,n)$: 可以与 $B(m,n)$ 一样证明只存在两种阶化共轭运算，所以有两种阶化星表示.

$C(n)$: 偶元的推广共轭映射就是普通的共轭映射，而奇元可以阶化为 $C(n)_{\bar{1}} = C(n)_{-1} \oplus C(n)_1$. $C(n)_{-1}$ 和 $C(n)_1$ 的元素可用 $2n$

维矩阵表示.

$$C(n)_{-1} \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & y_1 \\ -y_1^{\rm t} & 0 & 0 & 0 \\ y^{\rm t} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(n)_1 \quad : \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1^{\rm t} & 0 & 0 \\ 0 & x^{\rm t} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 x, x_1, y, y_1 为 $1 \times (n-1)$ 维矩阵. 设 $d \neq 0$, 如取阶化共轭运算为

$$\begin{aligned} &\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & y_1 \\ -y_1^{\rm t} & 0 & 0 & 0 \\ y^{\rm t} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1^* & -y^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^\dagger & 0 & 0 \\ 0 & y_1^\dagger & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1^{\rm t} & 0 & 0 \\ 0 & x^{\rm t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = d^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1^* & x^* \\ x^\dagger & 0 & 0 & 0 \\ x_1^\dagger & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.71}$$

这是把 $C(n)_{\mp 1}$ 映为 $C(n)_{\pm 1}$ 的映射. 通过具体计算, 可证明它们满足推广共轭映射的条件. 所以 $C(n)$ 存在含参数的两类阶化共轭运算. Scheunert 等证明 $C(n)$ 还存在含参数的两类共轭运算. $C(n)$ 有含实参数的两类星表示和两类阶化星表示.

对其他经典李超代数, 我们引述 Scheunert 等的结果如下:

$P(n)$: 既无共轭运算和阶化共轭运算, 也无星表示和阶化星表示.

$Q(n)$: 有两种共轭运算, 没有阶化共轭运算, 所以有两种星表示, 没有阶化星表示.

$F(4)$ 和 $G(3)$: 有两种阶化共轭运算，没有共轭运算，所以有两种阶化星表示，没有星表示.

上述讨论给出的是推广共轭运算的必要条件，也是星表示和阶化星表示的必要条件. 所以有可能两类不同的表示含有等价表示.

4.5.4 $B(0,1)$ 的阶化星表示

$B(0,1)$ 有两种阶化共轭运算. 从式 (4.69) 知当 $d=1$ 时，对应第一种阶化共轭运算，满足

$$\begin{aligned} V_{1/2}^{\ddagger} &= V_{-1/2}, \\ V_{-1/2}^{\ddagger} &= -V_{1/2}, \end{aligned} \tag{4.72a}$$

当 $d=-1$ 时，对应第二种阶化共轭运算，满足

$$\begin{aligned} V_{1/2}^{\ddagger} &= -V_{-1/2}, \\ V_{-1/2}^{\ddagger} &= V_{1/2}. \end{aligned} \tag{4.72b}$$

设 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是 $B(0,1)$ 不可约表示 $\rho\,(\hat{\varLambda})$ 的表示空间. 用 $\lambda\in Z_2$ 来标记最高权态 $|\hat{\varLambda}\ \hat{\varLambda}\ \lambda\rangle$ 的奇偶性， λ 为 0 或为 1 代表最高权态为偶或为奇. 已知阶化共轭运算矩阵元为

$$\langle A^{\ddagger}x|y\rangle=(-)^{\deg A\deg x}\langle x|Ay\rangle, \tag{4.73}$$

对 $x,y\in V$, $A\in B(0,1)$.

第一和第二类阶化共轭运算分别对应第一和第二类阶化星表示. 下面分别讨论两类阶化星表示满足的条件.

从第一类阶化星表示满足的条件

$$\begin{aligned} &\langle\hat{\varLambda}-1/2\ \ \hat{\varLambda}-1/2\ \ \lambda+1|\rho(V_{1/2})^{\ddagger}|\hat{\varLambda}\ \ \hat{\varLambda}\ \ \lambda\rangle \\ &\quad=\{(\rho(V_{1/2})^{\ddagger}|\hat{\varLambda}\ \ \hat{\varLambda}\ \ \lambda\rangle)^{\dagger}|\hat{\varLambda}-1/2\ \ \hat{\varLambda}-1/2\ \ \lambda+1\rangle\}^{*} \\ &\quad=\langle\hat{\varLambda}-1/2\ \ \hat{\varLambda}-1/2\ \ \lambda+1|\rho(V_{-1/2})|\hat{\varLambda}\ \ \hat{\varLambda}\ \ \lambda\rangle. \end{aligned}$$

取相因子使约化矩阵元为实，略去表示符号 ρ, 可得约化矩阵元满足的条件

$$\langle \hat{\Lambda}\ \ \lambda\|V\|\hat{\Lambda}-1/2\ \ \lambda+1\rangle = (-)^{\lambda}\langle \hat{\Lambda}-1/2\ \ \lambda+1\|V\|\hat{\Lambda}\ \ \lambda\rangle. \qquad (4.74)$$

从约化矩阵元乘积满足的方程 (4.61) 知只有 $\lambda = 1$ 时，才可能是第一类阶化星表示. 可以把约化矩阵元取为

$$\langle \hat{\Lambda}\ \ 1\|V\|\hat{\Lambda}-1/2\ \ 0\rangle = -\langle \hat{\Lambda}-1/2\ 0\|V\|\hat{\Lambda}\ \ 1\rangle. \qquad (4.75)$$

从第二类阶化星表示满足的条件

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{\Lambda}-1/2\ \ \hat{\Lambda}-1/2\ \ \lambda+1|\rho(V_{1/2})^{\ddagger}|\hat{\Lambda}\ \ \hat{\Lambda}\ \ \lambda\rangle \\
&\quad = \{(\rho(V_{1/2})^{\ddagger}|\hat{\Lambda}\ \ \hat{\Lambda}\ \ \lambda\rangle)^{\dagger}|\hat{\Lambda}-1/2\ \ \hat{\Lambda}-1/2\ \ \lambda+1\rangle\}^{*} \\
&\quad = -\langle \hat{\Lambda}-1/2\ \ \hat{\Lambda}-1/2\ \ \lambda+1|\rho(V_{-1/2})|\hat{\Lambda}\ \ \hat{\Lambda}\ \ \lambda\rangle.
\end{aligned}$$

同样取相因子使约化矩阵元为实，并略去表示符号 ρ, 可得约化矩阵元满足的条件

$$\langle \hat{\Lambda}\ \ \lambda\|V\|\hat{\Lambda}-1/2\ \ \lambda+1\rangle = (-)^{\lambda+1}\langle \hat{\Lambda}-1/2\ \ \lambda+1\|V\|\hat{\lambda}\lambda\rangle. \qquad (4.76)$$

从约化矩阵元乘积满足的方程 (4.61) 知只有 $\lambda = 0$ 时，才可能是第二类阶化星表示. 同样约化矩阵元也可取为满足式 (4.75).

如不可约表示 $(\Lambda, \lambda) = (1/2, 1)$ 为第一类阶化星表示. 取基顺序为： $V_{\bar{0}} : |0\ \ 0\rangle, V_{\bar{1}} : |1/2\ \ -1/2\rangle,\ |1/2\ \ 1/2\rangle$. 则有

$$V_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时有

$$V_{1/2}^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=V_{-1/2},$$

$$V_{-1/2}^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=-V_{1/2}.$$

也可取基顺序为奇空间在前： $V_{\bar{1}}:|1/2\quad -1/2\rangle$, $|1/2\quad 1/2\rangle$, $V_{\bar{0}}:|0\quad 0\rangle$, 则有

$$V_{1/2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$V_{-1/2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

注意奇空间在前，所以有

$$V_{1/2}^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=V_{-1/2},$$

$$V_{-1/2}^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}=-V_{1/2}.$$

又如不可约表示 $(\Lambda,\lambda)=(1/2,0)$ 为第二类阶化星表示. 取基顺序为： $V_{\bar{0}}:|1/2\quad -1/2\rangle$, $|1/2\ 1/2\rangle$, $V_{\bar{1}}:|0\quad 0\rangle$, 则有

$$V_{1/2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$V_{-1/2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

此时有

$$V_{1/2}^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=-V_{-1/2},$$

$$V_{-1/2}^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=V_{1/2}.$$

也可取基顺序为奇空间在前： $V_{\bar{1}}$: $|0\quad 0\rangle$, $V_{\bar{0}}$: $|1/2\quad -1/2\rangle$, $|1/2\ \ 1/2\rangle$, 则有

$$V_{1/2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$V_{-1/2}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以有

$$V_{1/2}^{\ddagger}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=-V_{-1/2},$$

$$V_{-1/2}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = V_{1/2}.$$

当然所有不可约表示 $(\Lambda, 1)$ 为第一类阶化星表示，所有不可约表示 $(\Lambda, 0)$ 为第二类阶化星表示. 此处不再详述.

参 考 文 献

[1] Kac V G. Lie superalgebras. Advances in Mathematics, 1977,(26):8

[2] Kac, V. G., Representations of classical Lie superalgebras. Lecture Notes in Mathematics, 1978,(676):597

[3] Scheunert M, Nahm W, Rittenberg V. Classification of all simple graded Lie algebras whose Lie algebra is reductive I. J Math Phys, 1976,(17):1626

[4] Scheunert M, Nahm W, Rittenberg V. Classification of all simple graded Lie algebras whose Lie algebra is reductive II. Construction of the exceptional algebras. J Math Phys, 1976,(17):1640

[5] Scheunert M, Nahm W, Rittenberg V. Graded Lie Algebras: Generalization of Hermitian Representations. J Math Phys, 1977,(18):146

[6] Scheunert M, Nahm W, Rittenberg V. Irreducible Representations of the $osp(2,1)$ and $spl(2,1)$ graded Lie Algebras. J Math Phys, 1977,(18):155

[7] Scheunert M. The theory of Lie Superalgebras. Lecture Notes in Mathematics, 1979,(716):1

[8] 孙洪洲，韩其智. 李超代数综述. 物理学进展， 1983,(3):81

第五章　一些基本经典李超代数的表示

本章给出一些求基本经典李超代数表示的实例. 在讨论不同的李超代数时, 为了说明 Wigner-Eckart 定理的应用, 我们定义的约化矩阵元不同, 它们可以相差一个与分量无关的因子. 前面两节给出 $B(1,1)$ 和 $A(1,0)$ 不可约表示的详细计算, 读者可以由此学会张量基方法在李超代数中的应用. 第三节给出 Gelfand 基下 $A(n,0)$ 不可约表示的解析表表达式, 并对 $A(n,m)$ 不可约表示求法进行简单的讨论.

5.1　$B(1,1)$ 的不可约表示

在此讨论 $B(1,1)$ 的实型 $osp(3,2)$ 的表示, 其 Dynkin 图和不可约表示标记图见图 5.1 .



图 5.1　$B(1,1)$ 的 Dynkin 图和不可约表示标记图

其 Cartan 矩阵为

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

其生成元由具有下列形式的 $3+2$ 维阶化矩阵给出

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} w & 0 & u & x & x_1 \\ 0 & -w & v & y & y_1 \\ -v & -u & 0 & z & z_1 \\ \hline -y_1 & -x_1 & -z_1 & d & e \\ y & x & z & f & -d \end{array}\right). \tag{5.1}$$

其素根为 $\alpha_1 = -\epsilon_1 + \delta_1$, $\alpha_2 = \epsilon_1$, 设 E_{ij} 为第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素为 0 的 $3+2$ 维阶化矩阵，则相应于素根的基为

$$\begin{aligned} &h_{\alpha_1} = E_{11} - E_{22} + E_{44} - E_{55}, && h_{\alpha_2} = E_{11} - E22, \\ &e_{\alpha_1} = -E_{25} + E_{41}, && e_{-\alpha_1} = E_{14} + E_{52}, \\ &e_{\alpha_2} = \sqrt{2}(E_{13} - E_{32}), && e_{-\alpha_2} = \sqrt{2}(-E_{23} + E_{31}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

满足

$$\begin{aligned} &[h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}] = 0, && [h_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}] = a_{ij} e_{\alpha_j}, \\ &\langle e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j} \rangle = \delta_{ij} h_{\alpha_j}, && [h_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = -a_{ij} e_{\alpha_j}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

$B(1,1)$ 张量基的生成元可取为

$$\begin{aligned} &J_0 = E_{11} - E_{22}, && J_{+1} = E_{13} - E_{32}, \\ &J_{-1} = E_{23} - E_{31}, && L_0 = (E_{44} - E_{55})/2, \\ &L_{+1} = -E_{45}/\sqrt{2}, && L_{-1} = E_{54}/\sqrt{2}, \\ &T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2} = -E_{15} + E_{42}, && T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2} = E_{25} - E_{41}, \\ &T_{1\ 1\ 1/2\ -1/2} = E_{14} + E_{52}, && T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2} = -E_{24} - E_{51}, \\ &T_{1\ 0\ 1/2\ 1/2} = -E_{43} + E_{35}, && T_{1\ 0\ 1/2\ -1/2} = -E_{34} - E_{53}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

偶元和偶元，偶元和奇元间满足以下对易关系：

(1) $[J_p, L_{p'}] = 0$,

$[J_0, J_{\pm 1}] = \pm J_{\pm 1}$,

$$[J_{+1}, J_{-1}] = -J_0,$$
$$[L_0, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1},$$
$$[L_{+1}, L_{-1}] = -L_0, \tag{5.5}$$

(2) $[J_0, T_{1\ p\ 1/2\ q}] = pT_{1\ p\ 1/2\ q},$

$$[J_{\pm 1}, T_{1\ p\ 1/2\ q}] = \mp\sqrt{(1 \mp p)(1 \pm p + 1)/2}T_{1\ p\pm 1\ 1/2\ q},$$
$$[L_0, T_{1\ p\ 1/2\ q}] = qT_{1\ p\ 1/2\ q},$$
$$[L_{\pm 1}, T_{1\ p\ 1/2\ q}] = \mp\sqrt{(1/2 \mp q)(1/2 \pm q + 1)/2}T_{1\ p\ 1/2\ q\pm 1},$$

奇元和奇元间满足以下反对易关系：

$$\begin{aligned}
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2}, T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ 1\ 1/2\ -1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2}, T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ 1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ -1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ -1/2}, T_{1\ 1\ 1/2\ -1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ -1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ -1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ 1/2}\} = 0,\\
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ -1/2}\} = J_{+1},\\
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ -1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ 1/2}\} = -J_{+1},\\
&\{T_{1\ 0\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2}\} = J_{-1},\\
&\{T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ -1/2}\} = -J_{-1},\\
&\{T_{1\ 0\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ 0\ 1/2\ -1/2}\} = 2L_0,\\
&\{T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}, T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2}\} = -2\sqrt{2}L_{+1},
\end{aligned} \tag{5.6a}$$

$$
\begin{aligned}
&\{T_{1\,0\,1/2\,1/2}, T_{1\,0\,1/2\,1/2}\} = 2\sqrt{2}L_{+1},\\
&\{T_{1\,1\,1/2\,-1/2}, T_{1\,-1\,1/2\,-1/2}\} = -2\sqrt{2}L_{-1},\\
&\{T_{1\,0\,1/2\,-1/2}, T_{1\,0\,1/2\,-1/2}\} = 2\sqrt{2}L_{-1},\\
&\{T_{1\,1\,1/2\,1/2}, T_{1\,-1\,1/2\,-1/2}\} = J_0 - 2L_0,\\
&\{T_{1\,1\,1/2\,-1/2}, T_{1\,-1\,1/2\,1/2}\} = -J_0 - 2L_0,
\end{aligned}
\tag{5.6b}
$$

其中 $p, p' = 0, \pm 1$, $q = \pm 1/2$. 从 (5.5) 式 (1) 可看出 Cartan 子代数的基为 J_0, L_0. 而 $J_0, J_{\pm 1}$ 和 $L_0, L_{\pm 1}$ 分别组成李代数 B_1 和 C_1 的基. 已知 B_1 和 C_1 均与 $so(3)$ 同构，可将它们分别记为 $so(3)_1$ 和 $so(3)_2$, 它们构成 $B(1,1)$ 的偶元. 从 (5.5) 式 (2) 可以看出 $T_{1\,p\,1/2\,q}$ 既是 $so(3)_1$ 的 1 秩不可约张量，也是 $so(3)_2$ 的 1/2 秩不可约张量. 式 (5.6) 给出 $T_{1\,p\,1/2\,q}$ 间满足的反对易关系，它们可以写成 $so(3)_1 \oplus so(3)_2$ 的耦合张量形式，独立的耦合张量式有下列三个:

$$
\begin{aligned}
&(TT)^{1\,0}_{p\,0} = J_p, \qquad p = 0, \pm 1,\\
&(TT)^{0\,1}_{0\,p} = -\sqrt{6}L_p, \qquad p = 0, \pm 1,\\
&(TT)^{2\,1}_{r\,p} = 0, \qquad r = 0, \pm 1, \pm 2.
\end{aligned}
\tag{5.6'}
$$

设 $\langle j\,n\,1\,p|j'\,n'\rangle$ 和 $\langle l\,m\,1/2\,q|l'\,m'\rangle$ 分别为 $so(3)_1$ 和 $so(3)_2$ 的 CG 系数，式 (5.6′) 中耦合张量的定义为

$$
\begin{aligned}
&(T^{1\,1/2}T^{1\,1/2})^{\tilde{j}\tilde{l}}_{\tilde{p}\tilde{q}}\\
&= \sum_{p\,q\,p'\,q'} \langle 1\,p\,1\,p'|\tilde{j}\,\tilde{p}\rangle \left\langle 1/2\,q\,1/2\,q'|\tilde{l}\,\tilde{q}\right\rangle T_{1\,p\,1/2\,q}T_{1\,p'\,1/2\,q'}.
\end{aligned}
$$

已知 $so(3)_1$ 和 $so(3)_2$ 的 Casimir 算子分别为

$$
\begin{aligned}
J^2 &= -J_{+1}J_{-1} - J_{-1}J_{+1} + {J_0}^2,\\
L^2 &= -L_{+1}L_{-1} - L_{-1}L_{+1} + {L_0}^2.
\end{aligned}
$$

取 $|j\ n\ l\ m\rangle$ 为 J^2, J_0, L^2, L_0 的共同本征矢，即

$$\begin{aligned}
J^2\,|j\ n\ l\ m\rangle &= j(j+1)\,|j\ n\ l\ m\rangle\,,\\
J_0\,|j\ n\ l\ m\rangle &= n\,|j\ n\ l\ m\rangle\,,\\
L^2\,|j\ n\ l\ m\rangle &= l(l+1)\,|j\ n\ l\ m\rangle\,,\\
L_0\,|j\ n\ l\ m\rangle &= m\,|j\ n\ l\ m\rangle\,,
\end{aligned}$$

为表示空间的基．定义不可约张量 $T_{1\ p 1/2\ q}$ 的约化矩阵元 $\langle j'\ l'\|T\|j\ l\rangle$ 为

$$\begin{aligned}
\left\langle j'\ n'\ l'\ m'|T_{1\ p\ 1/2\ q}|j\ n\ l\ m\right\rangle &= 1/\sqrt{(2j'+1)(2l'+1)}\\
&\quad\times\langle j\ n\ 1\ p|j'\ n'\rangle\,\langle l\ m\ 1/2\ q|l'\ m'\rangle\,\langle j'\ l'\|T\|j\ l\rangle\,.
\end{aligned}\tag{5.7}$$

可得耦合张量的约化矩阵元为

$$\begin{aligned}
&\left\langle j'\ l'\|(TT)^{\tilde{j}\ \tilde{l}}\|j\ l\right\rangle\\
&= (-)^{j+j'+\tilde{j}+l+l'+\tilde{l}}\sqrt{(2\tilde{j}+1)(2\tilde{l}+1)}\sum_{j''\ l''}\begin{Bmatrix}1 & 1 & \tilde{j}\\ j & j' & j''\end{Bmatrix}\\
&\quad\times\begin{Bmatrix}1/2 & 1/2 & \tilde{l}\\ l & l' & l''\end{Bmatrix}\langle j'\ l'\|T\|j''\ l''\rangle\,\langle j''\ l''\|T\|j\ l\rangle\,.
\end{aligned}\tag{5.8}$$

求 (5.6′) 式的非对角矩阵元，可得 T 的约化矩阵元乘积满足下列齐次方程

$$\begin{aligned}
&\langle j{+}2\ l{+}1\|T\|j{+}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,\\
&(l+1)\langle j{+}2\ l\|T\|j{+}1\ l{-}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle\\
&\qquad + l\langle j{+}2\ l\|T\|j{+}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,
\end{aligned}\tag{5.9a}$$

$$\begin{aligned}
&\langle j{+}2\ l{-}1\|T\|j{+}1\ l{-}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,\\
&\sqrt{j(2j+1)}\langle j{+}1\ l{+}1\|T\|j{+}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{(j+2)(2j+3)}\langle j{+}1\ l{+}1\|T\|j\ l{+}1/2\rangle\langle j\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&= 0, \\
&l\sqrt{j(2j+1)}\langle j{+}1\ l\|T\|j{+}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (l{+}1)\sqrt{j(2j{+}1)}\langle j{+}1\ l\|T\|j{+}1\ l{-}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + l\sqrt{(j+2)(2j+3)}\langle j{+}1\ l\|T\|j\ l{+}1/2\rangle\langle j\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (l{+}1)\sqrt{(j{+}2)(2j{+}3)}\langle j{+}1\ l\|T\|j\ l{-}1/2\rangle\langle j\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&= 0, \\
&\sqrt{j(2j+1)}\langle j{+}1\ l{-}1\|T\|j{+}1\ l{-}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + \sqrt{(j{+}2)(2j{+}3)}\langle j{+}1\ l{-}1\|T\|j\ l{-}1/2\rangle\langle j\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle = 0, \\
&j(2j-1)\langle j\ l{+}1\|T\|j{+}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (2j-1)(2j+3)\langle j\ l{+}1\|T\|j\ l{+}1/2\rangle\langle j\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (j+1)(2j+3)\langle j\ l{+}1\|T\|j{-}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{-}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&= 0, \qquad\qquad (5.9\text{b}) \\
&j(2j-1)\langle j\ l{-}1\|T\|j{+}1\ l{-}1/2\rangle\langle j{+}1\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (2j-1)(2j+3)\langle j\ l{-}1\|T\|j\ l{-}1/2\rangle\langle j\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (j+1)(2j+3)\langle j\ l{-}1\|T\|j{-}1\ l{-}1/2\rangle\langle j{-}1\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&= 0, \\
&\sqrt{(j-1)(2j-1)}\langle j{-}1\ l{+}1\|T\|j\ l{+}1/2\rangle\langle j\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + \sqrt{(j{+}1)(2j{+}1)}\langle j{-}1\ l{+}1\|T\|j{-}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{-}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&= 0, \\
&l\sqrt{(j-1)(2j-1)}\langle j{-}1\ l\|T\|j\ l{+}1/2\rangle\langle j\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (l+1)\sqrt{(j-1)(2j-1)}\langle j{-}1\ l\|T\|j\ l{-}1/2\rangle\langle j\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + l\sqrt{(j{+}1)(2j{+}1)}\langle j{-}1\ l\|T\|j{-}1\ l{+}1/2\rangle\langle j{-}1\ l{+}1/2\|T\|j\ l\rangle \\
&\quad + (l{+}1)\sqrt{(j{+}1)(2j{+}1)}\langle j{-}1\ l\|T\|j{-}1\ l{-}1/2\rangle\langle j{-}1\ l{-}1/2\|T\|j\ l\rangle
\end{aligned}
$$

$$= 0,$$

$$\sqrt{(j-1)(2j-1)}\langle j-1\ l-1\|T\|j\ l-1/2\rangle\langle j\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$+\sqrt{(j+1)(2j+1)}\langle j-1\ l-1\|T\|j-1\ l-1/2\rangle\langle j-1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$= 0,$$

$$\langle j-2\ l+1\|T\|j-1\ l+1/2\rangle\langle j-1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,$$

$$l\langle j-2\ l\|T\|j-1\ l+1/2\rangle\langle j+1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$+ (l+1)\langle j-2\ l\|T\|j-1\ l-1/2\rangle\langle j-1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,$$

$$\langle j-2\ l-1\|T\|j-1\ l-1/2\rangle\langle j-1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,$$

$$\sqrt{(j+2)(2j+1)}\langle j+1\ l\|T\|j+1\ l+1/2\rangle\langle j+1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$- \sqrt{(j+2)(2j+1)}\langle j+1\ l\|T\|j+1\ l-1/2\rangle\langle j+1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$- \sqrt{j(2j+3)}\langle j+1\ l\|T\|j\ l+1/2\rangle\langle j\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$+ \sqrt{j(2j+3)}\langle j+1\ l\|T\|j\ l-1/2\rangle\langle j\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle = 0, \tag{5.9c}$$

$$\sqrt{(j+1)(2j-1)}\langle j-1\ l\|T\|j\ l+1/2\rangle\langle j\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$- \sqrt{(j+1)(2j-1)}\langle j-1\ l\|T\|j\ l-1/2\rangle\langle j\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$- \sqrt{(j-1)(2j+1)}\langle j-1\ l\|T\|j-1\ l+1/2\rangle\langle j-1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$+\sqrt{(j-1)(2j+1)}\langle j-1\ l\|T\|j-1\ l-1/2\rangle\langle j-1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,$$

$$\langle j\ l+1\|T\|j+1\ l+1/2\rangle\langle j+1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$- \langle j\ l+1\|T\|j\ l+1/2\rangle\langle j\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$+ \langle j\ l+1\|T\|j-1\ l+1/2\rangle\langle j-1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle = 0,$$

$$\langle j\ l-1\|T\|j+1\ l-1/2\rangle\langle j+1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$- \langle j\ l-1\|T\|j\ l-1/2\rangle\langle j\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle$$

$$+ \langle j\ l-1\|T\|j-1\ l-1/2\rangle\langle j-1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle = 0.$$

把约化矩阵元乘积写成下列简单形式

$$
\begin{aligned}
x_1(j,l) &= \langle j\ l\|T\|j+1\ l+1/2\rangle\langle j+1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle,\\
x_2(j,l) &= \langle j\ l\|T\|j+1\ l-1/2\rangle\langle j+1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle,\\
x_3(j,l) &= \langle j\ l\|T\|j\ l+1/2\rangle\langle j\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle,\\
x_4(j,l) &= \langle j\ l\|T\|j\ l-1/2\rangle\langle j\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle,\\
x_5(j,l) &= \langle j\ l\|T\|j-1\ l+1/2\rangle\langle j-1\ l+1/2\|T\|j\ l\rangle,\\
x_6(j,l) &= \langle j\ l\|T\|j-1\ l-1/2\rangle\langle j-1\ l-1/2\|T\|j\ l\rangle.
\end{aligned}
$$

注意 J 和 L 的约化矩阵元分别为

$$
\begin{aligned}
\langle j\ l\|J\|j\ l\rangle &= \sqrt{(2j+1)(2l+1)j(j+1)},\\
\langle j\ l\|L\|j\ l\rangle &= \sqrt{(2j+1)(2l+1)l(l+1)},
\end{aligned}
$$

则取式 (5.6′) 的对角矩阵元，可得 T 的约化矩阵元满足下列齐次方程

$$
\begin{aligned}
& j(2j-1)lx_1(j,l)+j(2j-1)(l+1)x_2(j,l)\\
&\quad +(2j-1)(2j+3)lx_3(j,l)+(2j-1)(2j+3)(l+1)x_4(j,l)\\
&\quad +(j+1)(2j+3)lx_5(j,l)+(j+1)(2j+3)(l+1)x_6(j,l)=0,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

和非齐次方程

$$
\begin{aligned}
& jx_1(j,l)-jx_2(j,l)+x_3(j,l)-x_4(j,l)-(j+1)x_5(j,l)\\
&\quad +(j+1)x_6(j,l)=2(2j+1)(2l+1)j(j+1),
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

$$
\begin{aligned}
& lx_1(j,l)+(l+1)x_2(j,l)-lx_3(j,l)-(l+1)x_4(j,l)+lx_5(j,l)\\
&\quad +(l+1)x_6(j,l)=-6(2j+1)(2l+1)l(l+1).
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

注意

$$
\begin{aligned}
x_1(j,l) &= x_6(j+1,l+1/2),\\
x_3(j,l) &= x_4(j,l+1/2),\\
x_5(j,l) &= x_2(j-1,l+1/2).
\end{aligned}
$$

利用上齐次方程 (5.10) 和非齐次方程 (5.11) 和 (5.12), 可得由 x_1, x_3, x_5 递推到 x_2, x_4, x_6 的递推关系

$$\begin{aligned}x_2(j,l)=&[2(j+1)(2j+1)(l+1)]^{-1}[(2j^2+3j-2l)x_1(j,l)\\&+(2j+3)(2l+1)x_3(j,l)-(j+1)(2j+3)(2l+1)x_5(j,l)\\&-2(j+1)(2j+1)(2j+3)(l+1)(2l+1)(2l+j)],\end{aligned}\tag{5.13a}$$

$$\begin{aligned}x_4(j,l)=&[2j(j+1)(l+1)]^{-1}[j(2l+1)x_1(j,l)\\&+(-2j^2l-2jl+2l+1)x_3(j,l)-(j+1)(2l+1)x_5(j,l)\\&-2j(j+1)(2j+1)(l+1)(2l+1)(1-2l)],\end{aligned}\tag{5.13b}$$

$$\begin{aligned}x_6(j,l)=&-[2j(2j+1)(l+1)]^{-1}[j(2j-1)(2l+1)x_1(j,l)\\&+(2j-1)(2l+1)x_3(j,l)+(-2j^2-j+2l+1)x_5(j,l)\\&-2j(2j-1)(2j+1)(l+1)(2l+1)(j-2l+1)].\end{aligned}\tag{5.13c}$$

按照有限维不可约表示的最高权理论, 知不可约表示用最高权 $\Lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2)$ 标记时, 因为 λ_2 是偶根, 所以 $\lambda_2\in Z_+$; 而 λ_1 是奇根, 由表 4.3 知 $(\lambda_1-\lambda_2/2)\in Z_+$, 当 $(\lambda_1-\lambda_2/2)=0$ 时, 必有 $\lambda_2=\lambda_1=0$. 已知 $J_0=h_{\alpha_2}/2$, $L_0=h_{\alpha_1}/2-h_{\alpha_2}/4$, 所以最高权态 $|j_0\,n_0\,\hat{l}\,m_0\rangle$ 满足:

$$\begin{aligned}&J_{+1}|j_0\,n_0\,\hat{l}\,m_0\rangle=0,\\&-T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2}|j_0\,n_0\,\hat{l}\,m_0\rangle=0,\end{aligned}$$

可以得到 $n_0=j_0$, $m_0=\hat{l}$, 且 $\hat{l}$ 是此不可约表示空间中 l 可取的最大值. 即最高权态为 $|j_0\,j_0\,\hat{l}\,\hat{l}\rangle$. $\hat{l}$ 和 j_0 可以取任意非负整数或半整数. 我们用 $(j_0,\hat{l})$ 标记此不可约表示.

从最高权态出发, 反复利用约化矩阵元乘积递推关系 (5.13), 这是从 l 大的态递推到 l 小的态. 可得不可约表示 $(j_0,\hat{l})$ 中不为零

的约化矩阵元乘积如下，

$$
\begin{aligned}
&\langle j_0\ \hat{l}\|T\|j_0{+}1\ \hat{l}{-}1/2\rangle\langle j_0{+}1\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0\ \hat{l}\rangle \\
&\quad = -(2j_0+3)(2\hat{l}+1)(j_0+2\hat{l}), \\
&\langle j_0\ \hat{l}\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1/2\rangle\langle j_0\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0\ \hat{l}\rangle \\
&\quad = (2j_0+1)(2\hat{l}+1)(2\hat{l}-1), \\
&\langle j_0\ \hat{l}\|T\|j_0{-}1\ \hat{l}{-}1/2\rangle\langle j_0{-}1\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0\ \hat{l}\rangle \\
&\quad = (2j_0-1)(2\hat{l}+1)(j_0-2\hat{l}+1), \\
&\langle j_0{+}1\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0{+}1\ \hat{l}{-}1\rangle\langle j_0{+}1\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0{+}1\ \hat{l}{-}1/2\rangle \\
&\quad = 2(j_0+2)(2j_0+3)\hat{l}(2\hat{l}-1)/(j_0+1), \\
&\langle j_0{+}1\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1\rangle\langle j_0\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0{+}1\ \hat{l}{-}1/2\rangle \\
&\quad = j_0(2j_0+3)(2\hat{l}-1)(j_0-2\hat{l}+1)/(j_0+1), \\
&\langle j_0\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0{+}1\ \hat{l}{-}1\rangle\langle j_0{+}1\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1/2\rangle \\
&\quad = -2j_0(2j_0+3)\hat{l}(j_0+2\hat{l})/(j_0+1), \\
&\langle j_0\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1\rangle\langle j_0\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1/2\rangle \\
&\quad = -(2j_0+1)(j_0+2\hat{l})(j_0-2\hat{l}+1)/(j_0(j_0+1)), \\
&\langle j_0\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0{-}1\ \hat{l}{-}1\rangle\langle j_0{-}1\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1/2\rangle \\
&\quad = 2(j_0+1)(2j_0-1)\hat{l}(j_0-2\hat{l}+1)/j_0, \\
&\langle j_0{-}1\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1\rangle\langle j_0\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0{-}1\ \hat{l}{-}1/2\rangle \\
&\quad = -(j_0+1)(2j_0-1)(2\hat{l}-1)(j_0+2\hat{l})/j_0, \\
&\langle j_0{-}1\ \hat{l}{-}1/2\|T\|j_0{-}1\ \hat{l}{-}1\rangle\langle j_0{-}1\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0{-}1\ \hat{l}{-}1/2\rangle \\
&\quad = 2(j_0-1)(2j_0-1)\hat{l}(2\hat{l}-1)/j_0, \\
&\langle j_0{+}1\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0\ \hat{l}{-}3/2\rangle\langle j_0\ \hat{l}{-}3/2\|T\|j_0{+}1\ \hat{l}{-}1\rangle \\
&\quad = 2(2j_0+3)(\hat{l}-1)(j_0-2\hat{l}+1), \\
&\langle j_0\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0\ \hat{l}{-}3/2\rangle\langle j_0\ \hat{l}{-}3/2\|T\|j_0\ \hat{l}{-}1\rangle \\
&\quad = 4(2j_0+1)(\hat{l}-1)\hat{l}, \\
&\langle j_0{-}1\ \hat{l}{-}1\|T\|j_0\ \hat{l}{-}3/2\rangle\langle j_0\ \hat{l}{-}3/2\|T\|j_0{-}1\ \hat{l}{-}1\rangle \\
&\quad = -2(2j_0-1)(\hat{l}-1)(j_0+2\hat{l}).
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

其他约化矩阵元乘积为零，如：

$$\langle j_0+1\ \hat{l}-1/2\|T\|j_0+2\ \hat{l}-1\rangle\langle j_0+2\ \hat{l}-1\|T\|j_0+1\ \hat{l}-1/2\rangle=0,$$

$$\langle j_0-1\ \hat{l}-1/2\|T\|j_0-2\ \hat{l}-1\rangle\langle j_0-2\ \hat{l}-1\|T\|j_0-1\ \hat{l}-1/2\rangle=0,$$

$$\langle j_0+1\ \hat{l}-1\|T\|j_0+1\ \hat{l}-3/2\rangle\langle j_0+1\ \hat{l}-3/2\|T\|j_0+1\ \hat{l}-1\rangle=0,$$

$$\langle j_0\ \hat{l}-3/2\|T\|j_0+1\ \hat{l}-5/2\rangle\langle j_0+1\ \hat{l}-5/2\|T\|j_0\ \hat{l}-3/2\rangle=0,$$

$$\langle j_0\ \hat{l}-3/2\|T\|j_0\ \hat{l}-5/2\rangle\langle j_0\ \hat{l}-5/2\|T\|j_0\ \hat{l}-3/2\rangle=0,$$

等等. 以上为零的约化矩阵元乘积也可以容易地由齐次方程得到.

图 (5.2) 给出不可约表示 $(j_0,\hat{l})$ 包含的 (j,l) 值.

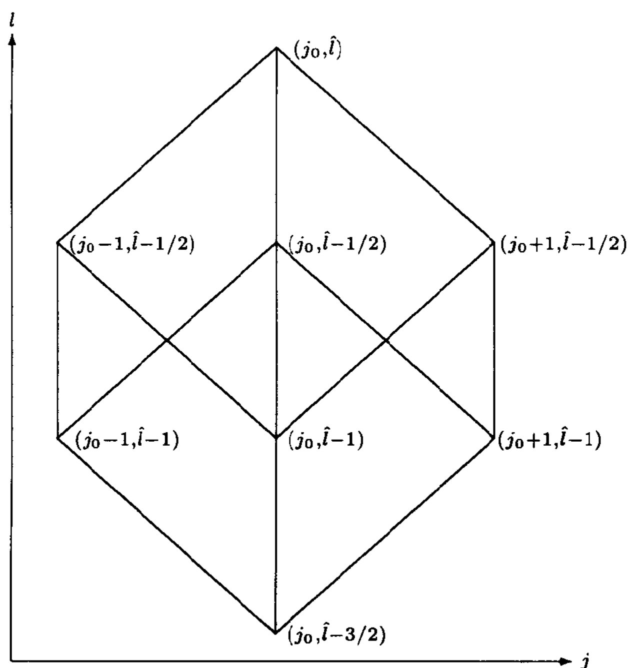


图 5.2 不可约表示 $(j_0,\hat{l})$ 包含的 (j,l) 值

一般不可约表示 $(j_0,\hat{l})$, 在 $j_0\geq 3/2$, $\hat{l}\geq 3/2$ 时， (j,l) 可取 $(j_0,\hat{l})$, $(j_0+1,\hat{l}-1/2)$, $(j_0,\hat{l}-1/2)$, $(j_0-1,\hat{l}-1/2)$, $(j_0+1,\hat{l}-1)$,

$(j_0,\hat{l}-1)$, $(j_0-1,\hat{l}-1)$ 和 $(j_0,\hat{l}-3/2)$ 八种值. 对应于 $4(4\hat{l}-1)(2j_0+1)$ 维不可约表示.

假定当

$$\langle j'\ l'\|T\|j\ l\rangle\langle j\ l\|T\|j'\ l'\rangle = 0$$

时，有

$$\langle j'\ l'\|T\|j\ l\rangle = 0,$$
$$\langle j\ l\|T\|j'\ l'\rangle = 0,$$

则有以下十种特别情况. 当 $\hat{l}=0$ 时, 必有 $j_0=0$, 只有 $(j,l)=(0,0)$ 的态，对应于一维恒等不可约表示. 当 $\hat{l}=1/2$, $j_0\le 1/2$ 时，只有 (j,l) 为 $(j_0,1/2)$ 和 $(j_0+1,0)$ 两种态， $j_0=0$ 和 $j_0=1/2$ 分别对应于五维和八维不可约表示. 当 $\hat{l}=1/2$, $j_0\ge 1$ 时，只有 $(j_0,1/2)$, $(j_0+1,0)$ 和 $(j_0-1,0)$ 三种态, 对应于 $4(2j_0+1)$ 维不可约表示. 当 $\hat{l}=1$, $j_0=0$ 时, 只有 $(0,1)$, $(1,1/2)$ 和 $(1,0)$ 三种态, 对应于 12 维不可约表示. 当 $\hat{l}=1$, $j_0=1/2$ 时，只有 $(1/2,1)$, $(3/2,1/2)$, $(1/2,1/2)$, $(3/2,0)$ 和 $(1/2,0)$ 五种态，对应 18 维不可约表示. 当 $\hat{l}\ge 1$, $j_0=2\hat{l}-1$ 时, 只有 $(2\hat{l}-1,\hat{l})$, $(2\hat{l},\hat{l}-1/2)$, $(2\hat{l}-1,\hat{l}-1/2)$ 和 $(2\hat{l},\hat{l}-1)$ 四种态, 对应于 $2(4\hat{l}+1)(4\hat{l}-1)$ 维不可约表示. 当 $\hat{l}=1$, $j_0\ge 3/2$ 时, 只有 $(j_0,1)$, $(j_0+1,1/2)$, $(j_0,1/2)$, $(j_0-1,1/2)$, $(j_0+1,0)$, $(j_0,0)$ 和 $(j_0-1,0)$ 七种态，对应于 $12(2j_0+1)$ 维不可约表示. 当 $\hat{l}\ge 3/2$, $j_0=0$ 时，只有 $(0,\hat{l})$, $(1,\hat{l}-1/2)$, $(1,\hat{l}-1)$ 和 $(0,\hat{l}-3/2)$ 四种态，对应于 $4(4\hat{l}-1)$ 维不可约表示. 当 $\hat{l}\ge 3/2$, $j_0=1/2$ 时，只有 $(1/2,\hat{l})$, $(3/2,\hat{l}-1/2)$, $(1/2,\hat{l}-1/2)$, $(3/2,\hat{l}-1)$, $(1/2,\hat{l}-1)$ 和 $(1/2,\hat{l}-3/2)$ 五种态，对应于 $8(4\hat{l}-1)$ 维不可约表示. 当 $\hat{l}\ge 3/2$, $j_0=1$ 时，有 $(1,\hat{l})$, $(2,\hat{l}-1/2)$, $(1,\hat{l}-1/2)$, $(0,\hat{l}-1/2)$, $(2,\hat{l}-1)$, $(1,\hat{l}-1)$, $(0,\hat{l}-1)$ 和 $(1,\hat{l}-3/2)$ 八种态，对应于 $12(4\hat{l}-1)$ 维不可约表示. 此情况与一般情况不同在于态 $|0\ \hat{l}-1/2\rangle$ 和态 $|0\ \hat{l}-1\rangle$ 之间 T 的约化矩阵元为零.

显然当 $\langle j'\ l'\|T\|j\ l\rangle\langle j\ l\|T\|j'\ l'\rangle = 0$ 时，也可能

$$\begin{aligned}\langle j'\ l'\|T\|j\ l\rangle &= 0,\\ \langle j\ l\|T\|j'\ l'\rangle &\neq 0;\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\langle j'\ l'\|T\|j\ l\rangle &\neq 0,\\ \langle j\ l\|T\|j'\ l'\rangle &= 0;\end{aligned}$$

这对应可约而不完全可约表示，所以基本经典李超代数 $B(1,1)$ 具有可约而不完全可约的有限维表示. 事实上，这种可约而不完全可约的有限维表示，除 $B(0,n)$ 外，在经典李超代数的表示中，是普遍存在的.

下面讨论李超代数 $B(1,1)$ 的阶化星表示. 已知偶元的阶化共轭运算和共轭运算相同，均为

$$\begin{aligned}&J_0^{\ddagger} = J_0^{\dagger} = J_0, && J_{+1}^{\ddagger} = J_{+1}^{\dagger} = -J_{-1},\\ &J_{-1}^{\ddagger} = J_{-1}^{\dagger} = -J_{+1}, && L_0^{\ddagger} = L_0^{\dagger} = L_0,\\ &L_{+1}^{\ddagger} = L_{+1}^{\dagger} = -L_{-1}, && L_{-1}^{\ddagger} = L_{-1}^{\dagger} = -L_{+1}.\end{aligned} \tag{5.15a}$$

奇元的阶化共轭运算为

$$\begin{aligned}T^{\ddagger}_{1\ 1\ 1/2\ 1/2} &= (\pm)T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2},\\ T^{\ddagger}_{1\ -1\ 1/2\ 1/2} &= (\pm)T_{1\ 1\ 1/2\ -1/2},\\ T^{\ddagger}_{1\ 1\ 1/2\ -1/2} &= (\mp)T_{1\ -1\ 1/2\ 1/2},\\ T^{\ddagger}_{1\ -1\ 1/2\ -1/2} &= (\mp)T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2},\\ T^{\ddagger}_{1\ 0\ 1/2\ 1/2} &= (\mp)T_{1\ 0\ 1/2\ -1/2},\\ T^{\ddagger}_{1\ 0\ 1/2\ -1/2} &= (\pm)T_{1\ 0\ 1/2\ 1/2},\end{aligned} \tag{5.15b}$$

式中正号对应第一种阶化共轭运算，负号对应第二种阶化共轭运算.

而阶化星表示 ρ 满足条件 $\rho(x^\ddagger) = \rho(x)^\ddagger$ 对 $x \in B(1,1)$. 按上表示空间基取法，偶元 $J_0, J_{+1}, J_{-1}, L_0, L_{+1}, L_{-1}$ 的表示在 j,l 取非负整数或半整数时满足此条件. 而奇元的表示矩阵，设 $\alpha = \deg|j\ n\ l\ m\alpha\rangle$, 注意 $\deg(T_{1\ p\ 1/2\ q}|j\ n\ l\ m\alpha\rangle) = \alpha + 1$, 满足

$$\begin{aligned}
&\langle j'\ n'\ l'\ m'\ \alpha+1|T^\ddagger_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}|j\ n\ l\ m\ \alpha\rangle \\
&\quad = (-)^\alpha \langle j\ n\ l\ m\ \alpha|T_{1\ 1\ 1/2\ 1/2}|j'\ n'\ l'\ m'\ \alpha+1\rangle^* \\
&\quad = (\pm)\langle j'\ n'\ l'\ m'\ \alpha+1|T_{1\ -1\ 1/2\ -1/2}|j\ n\ l\ m\ \alpha\rangle.
\end{aligned}$$

可得约化矩阵元为阶化星表示时满足的条件为

$$\begin{aligned}
&\langle j\ l\ \alpha\|T\|j'\ l'\ \alpha+1\rangle^* \\
&\quad = (\pm)(-)^\alpha(-)^{j-j'+l-l'-3/2}\langle j'\ l'\ \alpha+1\|T\|j\ l\ \alpha\rangle,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

其括号中正号对应第一类阶化星表示，负号对应第二类阶化星表示. 利用约化矩阵元乘积结果，设 $\alpha_0 = \deg|j_0\ n\ \hat{l}\ m\rangle$, 可得阶化星表示时 T 的约化矩阵元绝对值平方为

$$\begin{aligned}
&|\langle j_0\ \hat{l}\ \alpha_0\|T\|j_0+1\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\rangle|^2 \\
&\quad = (\pm)(-)^{\alpha_0+1}(2j_0+3)(2\hat{l}+1)(j_0+2\hat{l}), \\
&|\langle j_0\ \hat{l}\ \alpha_0\|T\|j_0\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\rangle|^2 \\
&\quad = (\pm)(-)^{\alpha_0+1}(2j_0+1)(2\hat{l}+1)(2\hat{l}-1), \\
&|\langle j_0\ \hat{l}\alpha_0\|T\|j_0-1\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\rangle|^2 \\
&\quad = (\pm)(-)^{\alpha_0}(2j_0-1)(2\hat{l}+1)(j_0-2\hat{l}+1), \qquad (5.17\text{a}) \\
&|\langle j_0+1\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\|T\|j_0+1\ \hat{l}-1\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\quad = (\pm)(-)^{\alpha_0}2(j_0+2)(2j_0+3)\hat{l}(2\hat{l}-1)/(j_0+1), \\
&|\langle j_0+1\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\|T\|j_0\ \hat{l}-1\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\quad = (\pm)(-)^{\alpha_0+1}j_0(2j_0+3)(2\hat{l}-1)(j_0-2\hat{l}+1)/(j_0+1),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|\langle j_0\ \hat{l}-1/2\alpha_0+1\|T\|j_0+1\ \hat{l}-1\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0}2j_0(2j_0+3)\hat{l}(j_0+2\hat{l})/(j_0+1), \\
&|\langle j_0\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\|T\|j_0\ \hat{l}-1\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0+1}(2j_0+1)(j_0+2\hat{l})(j_0-2\hat{l}+1)/(j_0(j_0+1)), \\
&|\langle j_0\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0\|T\|j_0-1\ \hat{l}-1\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0+1}2(j_0+1)(2j_0-1)\hat{l}(j_0-2\hat{l}+1)/j_0, \\
&|\langle j_0-1\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\|T\|j_0\ \hat{l}-1\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0}(j_0+1)(2j_0-1)(2\hat{l}-1)(j_0+2\hat{l})/j_0,
\end{aligned}
\tag{5.17b}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\langle j_0-1\ \hat{l}-1/2\ \alpha_0+1\|T\|j_0-1\ \hat{l}-1\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0}2(j_0-1)(2j_0-1)\hat{l}(2\hat{l}-1)/j_0, \\
&|\langle j_0+1\ \hat{l}-1\ \alpha_0\|T\|j_0\ \hat{l}-3/2\ \alpha_0+1\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0}2(2j_0+3)(\hat{l}-1)(j_0-2\hat{l}+1), \\
&|\langle j_0\ \hat{l}-1\ \alpha_0\|T\|j_0\ \hat{l}-3/2\ \alpha_0+1\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0+1}4(2j_0+1)(\hat{l}-1)\hat{l}, \\
&|\langle j_0-1\ \hat{l}-1\alpha_0\|T\|j_0\ \hat{l}-3/2\ \alpha_0\rangle|^2 \\
&\qquad =(\pm)(-)^{\alpha_0+1}2(2j_0-1)(\hat{l}-1)(j_0+2\hat{l}).
\end{aligned}
$$

可见在阶化星表示时，约化矩阵元的值与最高权态的奇偶性有关. 设最高权态为偶，即 $\deg|j_0\ n\ \hat{l}\ m\rangle=0$, 时，满足式 (5.17) 的第一类阶化星表示只有 (0,0) 一维恒等表示，而第二类阶化星表示除 (0,0) 外，还有 (0,1/2) 和 (1/2,1/2) 表示. 设最高权态为奇，即 $\deg|j_0\ n\ \hat{l}\ m\rangle=1$, 时，第一类阶化星表示为 (0,0), (0,1/2) 和 (1/2,1/2). 而第二类阶化星表示只有 (0,0). 可以看出最高权态的奇偶性互换正好对应于第一和第二类阶化星表示互换.

5.2 $A(1,0)$ 的不可约表示

在此讨论 $A(1,0)$ 的实型 $su(2,1) = spl(2,1)$ 的表示. 已知 $A(1,0)$ 的 Dynkin 图和不可约表示标记图如图 5.3, 其 Cartan 矩阵为

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



图 5.3 $A(1,0)$ 的 Dynkin 图和不可约表示标记图

其生成元由下列超迹为零的阶化矩阵给出

$$\left(\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right), \quad b_{11} + b_{22} - b_{33} = 0, \tag{5.18}$$

其素根为 $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\alpha_2 = \epsilon_2 - \delta_1$. 设 E_{ij} 为第 i 行第 j 列元素为 1 , 其余元素为 0 的 $2+1$ 维阶化矩阵, 则相应于素根的基为

$$\begin{aligned} &h_{\alpha_1} = E_{11} - E_{22}, \quad && h_{\alpha_2} = E_{22} + E33, \\ &e_{\alpha_1} = E_{12}, && e_{-\alpha_1} = E_{21}, \\ &e_{\alpha_2} = E_{23}, && e_{-\alpha_2} = E_{32}, \end{aligned} \tag{5.19}$$

且满足阶化对易关系 (4.25). 张量基的生成元可取为

$$\begin{aligned} &A = -(E_{11} + E_{22} + 2E_{33}), \quad && J_0 = (E_{11} - E_{22})/2, \\ &J_{+1} = -E_{12}/\sqrt{2}, && J_{-1} = E_{21}/\sqrt{2}, \\ &T_{1/2} = E_{13}/\sqrt{2}, && T_{-1/2} = E_{23}/\sqrt{2}, \\ &V_{1/2} = -E_{32}/\sqrt{2}, && V_{-1/2} = E_{31}/\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

满足以下对易和反对易关系

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & [A, J_m] = 0, \\
& [J_0, J_{\pm 1}] = \pm J_{\pm 1}, \\
& [J_{+1}, J_{-1}] = -J_0, \\
(2)\quad & [A, T_p] = T_p, \\
& [J_0, T_p] = pT_p, \\
& [J_{\pm 1}, T_p] = \mp\sqrt{(1/2 \mp p)(1/2 \pm p + 1)/2}T_{p\pm 1}, \\
& [A, V_p] = -V_p, \\
& [J_0, V_p] = pV_p, \\
& [J_{\pm 1}, V_p] = \mp\sqrt{(1/2 \mp p)(1/2 \pm p + 1)/2}V_{p\pm 1}, \\
(3)\quad & \{T_p, T_{p'}\} = 0, \\
& \{V_p, V_{p'}\} = 0, \\
& \{T_{\pm 1/2}, V_{\pm 1/2}\} = J_{\pm 1}/\sqrt{2}, \\
& \{T_{\pm 1/2}, V_{\mp 1/2}\} = J_0/2 \mp A/4,
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

其中 $m = 0, \pm 1$, $p, p' = \pm 1/2$. 从 (5.21) 式 (1) 可看出 Cartan 子代数的基为 A, J_0, 而 $J_0, J_{\pm 1}$ 组成李代数 $su(2)$ 的基, 它们是 $su(2/1)$ 的偶元. 从 (5.21) 式 (2) 可以看出 T_p, V_p 均是 $su(2)$ 的 1/2 秩不可约张量, 且分别使 A 的值增加或减少 1. (5.21) 式 (3) 给出 $T_p, V_{p'}$ 间满足的反对易关系.

设 $\langle k\, q\, k'\, q' | K\, Q \rangle$ 为 $su(2)$ 的 CG 系数, X_q^k 和 $Y_{q'}^{k'}$ 为 k 秩和 k' 秩不可约张量, 定义耦合张量为

$$
(X^k Y^{k'})_Q^K = \sum_{q\, q'} \langle k\, q\, k'\, q' | K\, Q \rangle\, X_q^k Y_{q'}^{k'},
$$

则 $T_p, V_{p'}$ 间反对易关系可以写成 $su(2)$ 的耦合张量形式. 独立的耦合张量式有下列四个

$$
(TT)_m^1 = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
&(VV)^1_m = 0, \\
&(VT)^1_m + (TV)^1_m = J_m/\sqrt{2}, \\
&(VT)^0_0 - (TV)^0_0 = A/(2\sqrt{2}).
\end{aligned} \tag{5.21'}
$$

已知 $su(2)$ 的 Casimir 算子为

$$
J^2 = -J_{+1}J_{-1} - J_{-1}J_{+1} + {J_0}^2
$$

取 A, J^2, J_0 的共同本征矢 $|\epsilon\ \Lambda\ k\rangle$ 为表示空间的基，即

$$
\begin{aligned}
&A\,|\epsilon\ \Lambda\ k\rangle = \epsilon\,|\epsilon\ \Lambda\ k\rangle\,, \\
&J^2\,|\epsilon\ \Lambda\ k\rangle = \Lambda(\Lambda+1)\,|\epsilon\ \Lambda\ k\rangle\,, \\
&J_0\,|\epsilon\ \Lambda\ k\rangle = k\,|\epsilon\ \Lambda\ k\rangle\,.
\end{aligned}
$$

定义不可约张量 X^k_q 的约化矩阵元 $\langle\epsilon'\ \Lambda'\|X^k\|\epsilon\ \Lambda\rangle$ 为

$$
\begin{aligned}
&\langle\epsilon'\ \Lambda'\ K'|X^k_q|\epsilon\ \Lambda\ K\rangle \\
&\quad = \langle k\ q\ \Lambda\ K|\Lambda'\ K'\rangle\ \langle\epsilon'\ \Lambda'\|X^k\|\epsilon\ \Lambda\rangle\,.
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

可得耦合张量的约化矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\epsilon'\ \Lambda'\|(X^kY^{k'})^l\|\epsilon\ \Lambda\right\rangle \\
&\quad = (-)^{k+k'+\Lambda+\Lambda'}\sqrt{2l+1}\sum_{\tilde\epsilon\ \tilde\Lambda}\sqrt{2\tilde\Lambda+1}\begin{Bmatrix} k & k' & l \\ \Lambda & \Lambda' & \tilde\Lambda \end{Bmatrix} \\
&\quad\ \times \left\langle\epsilon'\ \Lambda'\|X^k\|\tilde\epsilon\ \tilde\Lambda\right\rangle\left\langle\tilde\epsilon\ \tilde\Lambda\|Y^{k'}\|\epsilon\ \Lambda\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

则由式 (5.21′), (5.23) 可得 T, V 约化矩阵元满足下列齐次方程

$$
\begin{aligned}
&\langle\epsilon{+}2\ \Lambda{+}1\|T\|\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle = 0, \\
&\langle\epsilon{+}2\ \Lambda{-}1\|T\|\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\Lambda+1}\,\langle\epsilon{+}2\ \Lambda\|T\|\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\|T\|\epsilon\Lambda\rangle\\
&\quad+\sqrt{\Lambda}\,\langle\epsilon{+}2\ \Lambda\|T\|\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle=0,
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle\epsilon{-}2\ \Lambda{+}1\|V\|\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle=0,\\
&\langle\epsilon{-}2\ \Lambda{-}1\|V\|\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle=0,\\
&\sqrt{\Lambda+1}\,\langle\epsilon{-}2\ \Lambda\|V\|\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\|V\|\epsilon\Lambda\ \rangle\\
&\quad+\sqrt{\Lambda}\,\langle\epsilon{-}2\ \Lambda\|V\|\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle=0,
\end{aligned}
$$

和非齐次方程

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(\Lambda+1)}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad+\sqrt{(\Lambda{+}1)}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad+\sqrt{\Lambda}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad+\sqrt{\Lambda}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad=-\sqrt{\frac{\Lambda(\Lambda+1)(2\Lambda+1)}{2}},
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad-\sqrt{\Lambda}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{-}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad+\sqrt{\Lambda}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{-}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad+\sqrt{(\Lambda+1)}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad-\sqrt{(\Lambda+1)}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&=\frac{\epsilon\sqrt{2\Lambda+1}}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

利用上二非齐次方程，可得 T, V 约化矩阵元乘积的递推关系

$$
\begin{aligned}
&\langle\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\,\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon{-}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\\
&\quad=\frac{1}{(2\Lambda+1)}\,\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\rangle\,\langle\epsilon{+}1\ \Lambda{+}1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{2\sqrt{\Lambda(\Lambda+1)}}{(2\Lambda+1)}\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon+1\ \Lambda-1/2\rangle\langle\epsilon+1\ \Lambda-1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle
-\frac{\sqrt{(\Lambda+1)(\epsilon/2+\Lambda)}}{\sqrt{2(2\Lambda+1)}}.
\tag{5.27a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle\epsilon-1\ \Lambda-1/2\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\,\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon-1\ \Lambda-1/2\rangle\\
&=-\frac{1}{2\Lambda+1}\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon+1\ \Lambda-1/2\rangle\,\langle\epsilon+1\ \Lambda-1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad-\frac{2\sqrt{\Lambda(\Lambda+1)}}{2\Lambda+1}\langle\epsilon\ \Lambda\|V\|\epsilon+1\ \Lambda+1/2\rangle\langle\epsilon+1\ \Lambda+1/2\|T\|\epsilon\ \Lambda\rangle\\
&\quad+\frac{\sqrt{\Lambda}(\epsilon/2-\Lambda-1)}{\sqrt{2(2\Lambda+1)}}.
\end{aligned}
\tag{5.27b}
$$

按照有限维不可约表示的最高权理论，知不可约表示用最高权 $\Lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2)$ 标记时，因为 λ_1 是偶根，所以 $\lambda_1\in Z_+$；而 λ_2 是奇根，$A(m,n)$ 是一型经典李超代数，所以 λ_2 可以取任意复数. 已知 $J_0=h_{\alpha_1}/2$, $A=-(h_{\alpha_1}+2h_{\alpha_2})$, 所以最高权态 $|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\ k_0\rangle$ 满足：

$$
\begin{aligned}
J_{+1}\,|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\ k_0\rangle&=0,\\
T_{-1/2}|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\ k_0\rangle&=0.
\end{aligned}
$$

可以得到 $k_0=\Lambda_0$, 且 $\hat{\epsilon}$ 是此不可约表示空间中 ϵ 可取的最大值. 即最高权态为

$$
|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\ \Lambda_0\rangle,
$$

$\hat{\epsilon}$ 可取任意复数，而 Λ_0 可以取非负整数或半整数. 我们用 $(\hat{\epsilon},\Lambda_0)$ 标记此不可约表示.

从最高权态出发，反复利用约化矩阵元乘积的递推关系，可得不可约表示 $(\hat{\epsilon},\Lambda_0)$ 中不为零的约化矩阵元乘积如下：

$$
\begin{aligned}
&\langle\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0+1/2\|V\|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\rangle\,\langle\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\|T\|\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0+1/2\rangle\\
&=-\frac{\sqrt{(\Lambda_0+1)(\hat{\epsilon}/2+\Lambda_0)}}{\sqrt{2(2\Lambda_0+1)}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \hat\epsilon-1\ \Lambda_0-1/2\|V\|\hat\epsilon\ \Lambda_0\rangle\langle\hat\epsilon\ \Lambda_0\|T\|\hat\epsilon-1\ \Lambda_0-1/2\rangle \\
&\qquad=\frac{\sqrt{\Lambda_0}(\hat\epsilon/2-\Lambda_0-1)}{\sqrt{2(2\Lambda_0+1)}}, \\
&\langle \hat\epsilon-2\ \Lambda_0\|V\|\hat\epsilon-1\ \Lambda_0+1/2\rangle\langle\hat\epsilon-1\ \Lambda_0+1/2\|T\|\hat\epsilon-2\ \Lambda_0\rangle \\
&\qquad=\frac{\sqrt{(\Lambda_0+1)}(\hat\epsilon/2-\Lambda_0-1)}{\sqrt{2(2\Lambda_0+1)}}, \\
&\langle \hat\epsilon-2\ \Lambda_0\|V\|\hat\epsilon-1\ \Lambda_0-1/2\rangle\langle\hat\epsilon-1\ \Lambda_0-1/2\|T\|\hat\epsilon-2\ \Lambda_0\rangle \\
&\qquad=-\frac{\sqrt{\Lambda_0}(\hat\epsilon/2+\Lambda_0)}{\sqrt{2(2\Lambda_0+1)}},
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

其他约化矩阵元乘积为零，如

$$
\begin{aligned}
&\langle \hat\epsilon-2\ \Lambda_0+1\|V\|\hat\epsilon-1\ \Lambda_0+1/2\rangle\langle\hat\epsilon-1\ \Lambda_0+1/2\|T\|\hat\epsilon-2\ \Lambda_0+1\rangle=0, \\
&\langle \hat\epsilon-2\ \Lambda_0-1\|V\|\hat\epsilon-1\ \Lambda_0-1/2\rangle\langle\hat\epsilon-1\ \Lambda_0-1/2\|T\|\hat\epsilon-2\ \Lambda_0-1\rangle=0, \\
&\langle \hat\epsilon-3\ \Lambda_0-1/2\|V\|\hat\epsilon-2\ \Lambda_0\rangle\langle\hat\epsilon-2\ \Lambda_0\|T\|\hat\epsilon-3\ \Lambda_0-1/2\rangle=0, \\
&\langle \hat\epsilon-3\ \Lambda_0+1/2\|V\|\hat\epsilon-2\ \Lambda_0\rangle\langle\hat\epsilon-2\ \Lambda_0\|T\|\hat\epsilon-3\ \Lambda_0+1/2\rangle=0,
\end{aligned}
$$

等等. 以上为零的约化矩阵元乘积也可以容易地由齐次方程得到.

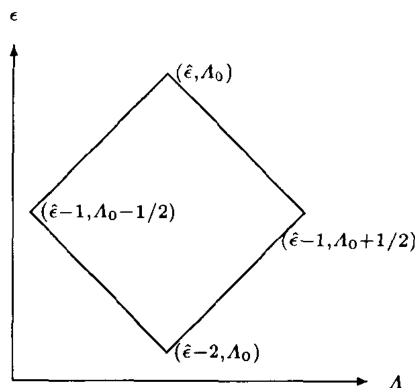


图 5.4 不可约表示 $(\hat\epsilon, \Lambda_0)$ 包含的 (ϵ, Λ) 值

一般不可约表示 $(\hat\epsilon, \Lambda_0)$ 中，当 $\hat\epsilon \neq -2\Lambda_0$, $\hat\epsilon \neq 2\Lambda_0+2$ 时，(ϵ, Λ) 可取 $(\hat\epsilon, \Lambda_0)$, $(\hat\epsilon-1, \Lambda_0-1/2)$, $(\hat\epsilon-1, \Lambda_0+1/2)$, $(\hat\epsilon-2, \Lambda_0)$, 四种值，见图 5.4. 对应于 $(8\Lambda_0+4)$ 维不可约表示.

假定当

$$\langle\epsilon'\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon'\ \Lambda'\rangle=0,$$

有

$$\langle\epsilon'\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle=0,$$
$$\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon'\ \Lambda'\rangle=0,$$

有以下四种特别情况，当 $\Lambda_0=0$ 和 $\hat{\epsilon}=0$ 时，只有 $(\epsilon,\Lambda)=(0,0)$ 的态，对应于一维恒等不可约表示. 当 $\Lambda_0=0$ 而 $\hat{\epsilon}\neq 0,2$ 时，只有 (ϵ,Λ) 为 $(\hat{\epsilon},0),(\hat{\epsilon}-1,1/2)$ 和 $(\hat{\epsilon}-2,0)$ 三种态，对应于四维不可约表示. 当 $\hat{\epsilon}=2\Lambda_0+2$ 时，只有 $(\hat{\epsilon},\Lambda_0)$ 和 $(\hat{\epsilon}-1,\Lambda_0+1/2)$ 两种态，对应于 $(4\Lambda_0+3)$ 维不可约表示. 当 $\hat{\epsilon}=-2\Lambda_0$ 时，只有 $(\hat{\epsilon},\Lambda_0)$ 和 $(\hat{\epsilon}-1,\Lambda_0-1/2)$ 两种态，对应于 $(4\Lambda_0+1)$ 维不可约表示. 这些特别情况被称为非典型表示，其他情况被称为典型 (typical) 表示. 最高权 $(\hat{\epsilon},\Lambda_0)$ 的可取范围见后面图 5.5.

显然也可能

$$\langle\epsilon'\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle=0,$$
$$\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon'\ \Lambda'\rangle\neq 0;$$

或

$$\langle\epsilon'\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle\neq 0,$$
$$\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon'\ \Lambda'\rangle=0,$$

而使约化矩阵元乘积为零. 这对应于可约而不完全可约表示，所以基本经典李超代数 $A(1,0)$ 具有可约而不完全可约的有限维表示. 我们再次看到这种可约而不完全可约的有限维表示，在经典李超代数的表示中的存在.

下面讨论李超代数 $A(1,0)$ 的星表示和阶化星表示. 已知偶元的共轭运算和阶化共轭运算相同，均为

$$\begin{aligned}&A^{\dagger}=A^{\ddagger}=A, && J_0^{\dagger}=J_0^{\ddagger}=J_0,\\&J_{+1}^{\dagger}=J_{+1}^{\ddagger}=-J_{-1}, && J_{-1}^{\dagger}=J_{-1}^{\ddagger}=-J_{+1}.\end{aligned}\tag{5.29a}$$

而奇元的共轭运算为

$$\begin{aligned} &T^{\dagger}_{1/2}=(\pm)(1/d)V_{-1/2}, \quad T^{\dagger}_{-1/2}=(\mp)(1/d)V_{1/2},\\ &V^{\dagger}_{1/2}=(\mp)dT_{-1/2}, \qquad\quad V^{\dagger}_{-1/2}=(\pm)dT_{1/2}, \end{aligned} \tag{5.29b}$$

其中 d 为大于零的实参数，上式括号中上面符号对应第一类共轭运算，下面符号对应第二类共轭运算. 奇元的阶化共轭运算为

$$\begin{aligned} &T^{\ddagger}_{1/2}=(\pm)(1/d)V_{-1/2}, \quad T^{\ddagger}_{-1/2}=(\mp)(1/d)V_{1/2},\\ &V^{\ddagger}_{1/2}=(\pm)dT_{-1/2}, \qquad\quad V^{\ddagger}_{-1/2}=(\mp)dT_{1/2}. \end{aligned} \tag{5.29c}$$

同样 d 为大于零的实参数，上式括号中上面符号对应第一类阶化共轭运算，下面符号对应第二类阶化共轭运算.

已知星表示 ρ 满足条件 $\rho(x^{\dagger})=\rho(x)^{\dagger}$, 对 $x\in A(1,0)$. 按上表示空间基取法，偶元 A, J_0, J_{+1}, J_{-1} 的表示在 Λ 取非负整数或半整数时满足此条件. 而奇元的表示矩阵满足

$$\begin{aligned} &\langle\epsilon-1\ \Lambda'\ K'|T^{\dagger}_{1/2}|\epsilon\ \Lambda\ K\rangle\\ &\quad=\langle\epsilon\ \Lambda\ K|T_{1/2}|\epsilon-1\ \Lambda'\ K'\rangle^{*}\\ &\quad=(\pm)(1/d)\langle\epsilon-1\ \Lambda'\ K'|V_{-1/2}|\epsilon\ \Lambda\ K\rangle, \end{aligned}$$

代入 CG 系数，可得星表示时约化矩阵元满足的条件为

$$\begin{aligned} &\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon-1\ \Lambda'\rangle^{*}\\ &\quad=(-)^{\Lambda-\Lambda'+1/2}(\pm)(1/d)\sqrt{(2\Lambda'+1)/(2\Lambda+1)}\langle\epsilon-1\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle. \end{aligned} \tag{5.30}$$

利用约化矩阵元乘积结果，可得星表示时 V 的约化矩阵元绝对值平方为

$$\begin{aligned} &|\langle\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0+1/2\|V\|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\rangle|^2=-(\pm)d(\hat{\epsilon}/2+\Lambda_0)/2,\\ &|\langle\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0-1/2\|V\|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\rangle|^2=-(\pm)d(\hat{\epsilon}/2-\Lambda_0-1)/2,\\ &|\langle\hat{\epsilon}-2\ \Lambda_0\|V\|\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0+1/2\rangle|^2=-(\pm)d\frac{(\Lambda_0+1)(\hat{\epsilon}/2-\Lambda_0-1)}{2\Lambda_0+1},\\ &|\langle\hat{\epsilon}-2\ \Lambda_0\|V\|\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0-1/2\rangle|^2=-(\pm)d\frac{\Lambda_0(\hat{\epsilon}/2+\Lambda_0)}{2\Lambda_0+1}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

于是当取括号中上面正号时，得第一类星表示要求最高权满足 $\hat{\epsilon} \leq -2\Lambda_0$. 当取括号下面负号时，得第二类星表示要求最高权满足 $\hat{\epsilon} \geq 2\Lambda_0 + 2$.

而阶化星表示 ρ 满足条件 $\rho(x^\ddagger) = \rho(x)^\ddagger$, 对 $x \in A(1,0)$. 按上表示空间基取法，偶元 A, J_0, J_{+1}, J_{-1} 的表示在 Λ 取非负整数或半整数时满足此条件. 而奇元的表示矩阵，设 $\alpha = \deg|\epsilon\ \Lambda\ K\rangle$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\langle\epsilon-1\ \Lambda'\ K'|T^\ddagger_{1/2}|\epsilon\ \Lambda\ K\rangle \\
&\quad = (-)^\alpha\langle\epsilon\ \Lambda\ K|T_{1/2}|\epsilon-1\ \Lambda'\ K'\rangle^* \\
&\quad = (\pm)(1/d)\langle\epsilon-1\ \Lambda'\ K'|V_{-1/2}|\epsilon\ \Lambda\ K\rangle,
\end{aligned}
$$

可得约化矩阵元为阶化星表示时满足的条件为

$$
\begin{aligned}
&\langle\epsilon\ \Lambda\|T\|\epsilon-1\ \Lambda'\rangle^* \\
&\quad = (-)^\alpha(\pm)(1/d)(-)^{\Lambda-\Lambda'+1/2}\sqrt{(2\Lambda'+1)/(2\Lambda+1)}\langle\epsilon-1\ \Lambda'\|V\|\epsilon\ \Lambda\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

设 $\alpha_0 = \deg|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\ K\rangle$, 注意 $\deg|\epsilon-1\ \Lambda\pm1/2\ K'\rangle = \deg|\epsilon\ \Lambda\ K\rangle + 1$, 利用约化矩阵元乘积结果，可得阶化星表示时 V 的约化矩阵元绝对值平方为

$$
\begin{aligned}
&|\langle\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0+1/2\|V\|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\rangle|^2 = (-)^{\alpha_0+1}(\pm)d(\hat{\epsilon}/2+\Lambda_0)/2, \\
&|\langle\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0-1/2\|V\|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\rangle|^2 = (-)^{\alpha_0+1}(\pm)d(\hat{\epsilon}/2-\Lambda_0-1)/2, \\
&|\langle\hat{\epsilon}-2\ \Lambda_0\|V\|\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0+1/2\rangle|^2 = (-)^{\alpha_0}(\pm)d\frac{(\Lambda_0+1)(\hat{\epsilon}/2-\Lambda_0-1)}{2\Lambda_0+1}, \\
&|\langle\hat{\epsilon}-2\ \Lambda_0\|V\|\hat{\epsilon}-1\ \Lambda_0-1/2\rangle|^2 = (-)^{\alpha_0}(\pm)d\frac{\Lambda_0(\hat{\epsilon}/2+\Lambda_0)}{2\Lambda_0+1}.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

可见在阶化星表示时，约化矩阵元的值与最高权态的奇偶性有关. 设最高权态为偶，即 $\deg|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\rangle = 0$, 则当取 (5.33) 式中上面符号 (+) 时，得第一类阶化星表示要求最高权满足 $\hat{\epsilon} = -2\Lambda_0$. 当取 (5.33) 式中下面符号 (−) 时，得第二类阶化星表示要求最高权满

足 $\hat{\epsilon}=2\Lambda_0+2$, 或满足 $\Lambda_0=0,\quad 0\leq\hat{\epsilon}\leq 2$. 设最高权态为奇，即 $\deg|\hat{\epsilon}\ \Lambda_0\rangle=1$, 则当取 (+) 时，得第一类阶化星表示要求最高权满足 $\hat{\epsilon}=2\Lambda_0+2$, 或满足 $\Lambda_0=0,\quad 0\leq\hat{\epsilon}\leq 2$. 当取 (−) 时，得第二类阶化星表示要求最高权满足 $\hat{\epsilon}=-2\Lambda_0$. 所以最高权态的奇偶性互换正好对应于第一和第二类阶化星表示互换.

最高权 $(\hat{\epsilon},\Lambda_0)$ 的可取值见图 5.5.

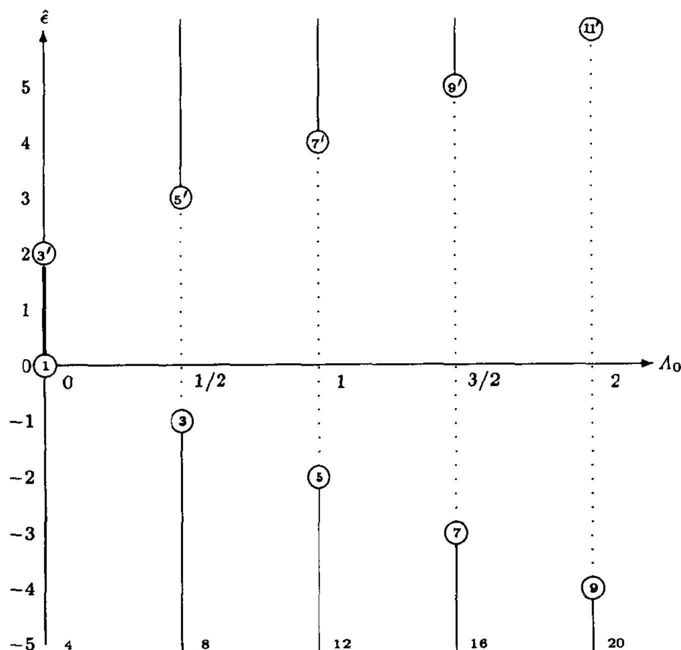


图 5.5 最高权 $(\hat{\epsilon},\Lambda_0)$ 的可取值

图中实线和圆圈代表可能的星表示，粗线和圆圈代表可能的阶化星表示，而虚线代表既非星表示也非阶化星表示的不可约表示. 圆圈中的数代表该不可约表示的维数，在实线，虚线和粗线下右方的数也代表各相应不可约表示的维数. 其中实线，虚线和粗线对应典型表示，而圆圈对应非典型表示.

注意到取基为 A, J^2, J_0 的共同本征矢，即相当作 $A(1,0) \supset su(2) \otimes u(1)$ 约化．利用已知的 $su(2)$ 和 $u(1)$ 不可约表示直积约化，可以求出 $A(0,1)$ 不可约表示直积约化．如第二类星表示直积 $(2,0) \otimes (3,1/2)$，包含的 (ϵ, Λ) 为 $(5,1/2) \oplus 2(4,1) \oplus (4,0) \oplus (3,3/2) \oplus (3,1/2)$．其中最高权 $(5,1/2)$ 对应的不可约表示还包含权 $(4,1),(4,0),(3,1/2)$，剩下 $(4,1) \oplus (3,3/2)$ 对应不可约表示 $(4,1)$，所以有

$$(2,0) \otimes (3,1/2) = (5,1/2) \oplus (4,1),$$

不可约表示 $(5,1/2)$ 和 $(4,1)$ 也都是第二类星表示．同样在取最高权态为偶时，$(2,0)$ 和 $(3,1/2)$ 也是第二类阶化星表示，但 $(5,1/2)$ 却不是阶化星表示．所以说阶化星表示的直积并不一定可以约化为阶化星表示的直和．

在结束本节前，我们将 $A(1,0)$ 与 $su(3)$ 的不可约表示作一个比较．由节 2.1 知 $su(3)$ 与 $A(1,0)$ 一样都有八个生成元．而且都具有以 $J_0, J_{\pm 1}$ 和 A 为生成元的子代数 $su(2) \otimes u(1)$．剩下的生成元 T_p, V_p 也都是 $su(2)$ 的 1/2 秩不可约张量，且分别使 A 的值增加或减少 1．但它们的不可约表示却很不同．$su(3)$ 中 A 的本征值只能取非负整数，而 $A(1,0)$ 中 A 的本征值却可取任意复数．$su(3)$ 不可约表示 (Λ_1, Λ_2) 所包含的 $su(2) \otimes u(1)$ 不可约表示个数随 λ_1, λ_2 的值增加而增加，而 $A(1,0)$ 却最多只有四个．$su(3)$ 的全部有限维不可约表示都是星表示，而 $A(1,0)$ 却有有限维阶化星表示和既不是星表示也不是阶化星表示的有限维表示．这说明李代数与李超代数是有明显不同的．

5.3 $A(n-1,0)$ 的不可约表示

经典李超代数 $A(n-1,0) \simeq spl(n,1)$ 是一般线性李超代数 $pl(n,1)$ 的超迹为零的子代数．

已知$pl(n,1,R)_{\bar{0}}=gl(n,R)\oplus gl(1,R)$, $gl(n,R)$的生成元为$E_{i\,j}$, $i,j=1,\cdots,n$, $gl(1,R)$ 的生成元为 $E_{n+1\,n+1}$. $pl(n,1,R)_{\bar{1}}$ 的生成元为 $E_{i\,n+1},E_{n+1\,i}$, $i=1,\cdots,n$. 可取 $\{E_{n+1\,n+1},E_{1\,1},\cdots,E_{n\,n}\}$ 为 $pl(n,1,R)$ 的 Cartan 子代数的基.

对 $i,j,k,l=1,\cdots,n$, $pl(n,1,R)$ 的生成元满足以下对易和反对易关系

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad [E_{i\,j},E_{k\,l}]=\delta_{j\,k}E_{i\,l}-\delta_{i\,l}E_{k\,j},\\
&\qquad\ \ [E_{i\,j},E_{n+1\,n+1}]=0,\\
&(2)\quad [E_{i\,j},E_{k\,n+1}]=\delta_{j\,k}E_{i\,n+1},\\
&\qquad\ \ [E_{n+1\,n+1},E_{k\,n+1}]=-E_{k\,n+1},\\
&\qquad\ \ [E_{i\,j},E_{n+1\,k}]=-\delta_{i\,k}E_{n+1\,j},\\
&\qquad\ \ [E_{n+1\,n+1},E_{n+1\,k}]=E_{n+1\,k},\\
&(3)\quad \{E_{i\,n+1},E_{j\,n+1}\}=0,\\
&\qquad\ \ \{E_{n+1\,i},E_{n+1\,j}\}=0,\\
&\qquad\ \ \{E_{i\,n+1},E_{n+1\,j}\}=E_{i\,j}+\delta_{i\,j}E_{n+1\,n+1}.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

由 $pl(n,1)$ 的对角生成元 $E_{1\,1},E_{2\,2},\cdots,E_{n+1\,n+1}$, 和超迹为零条件, 知 $spl(n,1)$ 的对角生成元可以取为 $E_{1\,1}-E_{2\,2},\cdots,E_{n-1\,n-1}$ $-E_{n\,n}$ 和 $E_{n\,n}+E_{n+1\,n+1}$, 最后一个生成元 $E_{n\,n}+E_{n+1\,n+1}$, 也可以换成 $D=(nE_{n+1\,n+1}+\sum_{i=1}^{n}E_{i\,i})/(n-1)$. $spl(n,1)$ 和 $pl(n,1)$ 的非对角生成元完全一样. 李超代数 $su(n/1)$ 是 $spl(n,1)$ 的一个实形, 其生成元有厄米共轭运算且满足 $x^{\dagger}=x$, 对 $x\in su(n/1)$. 所以可以取其对角生成元与 $spl(n,1)$ 一样, 非对角生成元为 $(E_{i\,j}+E_{j\,i}),i(E_{i\,j}-E_{j\,i})$, 对 $i<j\leq(n+1)$. 于是通过实一般线性李超代数 $pl(n,1,R)$ 的不可约表示, 可以诱导出 $spl(n,1,R)$ 的不可约表示. 通过 $pl(n,1,R)$ 的不可约星表示, 可以诱导出 $spl(n,1,R)$ 和 $su(n/1)$ 的不可约星表示. 下面将求 $pl(n,1,R)$ 的不可约星表示.

$pl(n,1,R)$ 有限维不可约表示可以用最高权 $(\hat{m},\Gamma_n^0)$ 来标记, 其中 $\hat{m}$ 为 $E_{n+1\,n+1}$ 的最大本征值, 而 $\Gamma_n^0=(m_{1\,n}^0,\cdots,m_{n\,n}^0)$, 是相

应的 $gl(n,R)$ 的不可约表示标记. 用 $pl(n,1,R)\supset gl(n,R)\supset gl(n-1,R)\supset\cdots\supset gl(1,R)$ 来标记不可约表示 $(\hat{m},\Gamma_n^0)$ 空间的态. 即 $(\hat{m},\Gamma_n^0)$ 表示空间的基可以取为

$$\left|\begin{matrix}\hat{m}\ \Gamma_n^0\\ \Gamma_n\\ \Gamma_{n-1}\\ \gamma_{n-1}\end{matrix}\right\rangle=\left|\begin{matrix}\hat{m}\ m_{1\,n}^0 & m_{2\,n}^0 & \cdots & m_{n\,n}^0\\ m_{1\,n} & m_{2\,n} & \cdots & m_{n\,n}\\ & m_{1\,n-1}\ \cdots\ m_{n-1\,n-1} & & \\ & \gamma_{n-1} & & \end{matrix}\right\rangle=\left|\begin{matrix}\hat{m}\ \Gamma_n^0\\ \Gamma_n\\ \Gamma_{n-1}\\ \gamma_{n-1}\end{matrix}\right\rangle.$$

γ_{n-1} 是 Γ_{n-1} 分量指标的简写. 这基是 Gelfand 基在李超代数中的推广, 也称为 $pl(n,1)$ 的 Gelfand 基.

与 $gl(n,R)$ 写法一致,

$$\Gamma_i(j)=(m_{1\,i},\cdots,m_{j-1\,i},m_{j\,i}+1,m_{j+1\,i},\cdots,m_{i\,i}),$$

对固定的 Γ_i, Γ_{i-1} 的最高值也记为 $\hat{\Gamma}_{i-1}=(m_{1\,i},m_{2\,i},\cdots,m_{i-1\,i})$. Γ_{i-1} 的最低值也记为 $\check{\Gamma}_{i-1}=(m_{2\,i},m_{3\,i},\cdots,m_{i\,i})$. $(\hat{m},\Gamma_n^0)$ 的最高权态为

$$\left|\begin{matrix}\hat{m}\ \Gamma_n^0\\ \Gamma_n^0\\ \hat{\Gamma}_{n-1}^0\\ \hat{\gamma}_{n-1}^0\end{matrix}\right\rangle=\left|\begin{matrix}\hat{m}\ \Gamma_n^0\\ \Gamma_n^0\\ \hat{\Gamma}_{n-1}^0\\ \hat{\gamma}_{n-1}^0\end{matrix}\right\rangle.$$

在 Gelfand 基下, 利用第二章 $gl(n,R)$ 不可约表示结果, 生成元 $E_{i\,j}$, $i,j=1,\cdots,n$, 的表示矩阵是已知的, 而 $E_{n+1\,n+1}$ 满足

$$E_{n+1\,n+1}\left|\begin{matrix}\hat{m}\ \Gamma_n^0\\ \Gamma_n\\ \gamma_n\end{matrix}\right\rangle=[\hat{m}+\sum_{i=1}^{n}(m_{i\,n}^0-m_{i\,n})]\left|\begin{matrix}\hat{m}\ \Gamma_n^0\\ \Gamma_n\\ \gamma_n\end{matrix}\right\rangle.\quad(5.35)$$

也就是说全部偶元的表示矩阵是已知的，所以只需再求出奇元的表示矩阵即可．此也说明表示空间是按权分解的．

设 a 为实参数，奇元满足如 4.5 节所给的厄米共轭条件

$$E_{n+1\ i}^{\dagger} = aE_{i\ n+1}. \tag{5.36}$$

星表示矩阵元满足

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \middle| E_{n+1\ i} \middle| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n' \\ \gamma_n' \end{matrix} \right\rangle = a \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n' \\ \gamma_n' \end{matrix} \middle| E_{i\ n+1} \middle| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle^*. \tag{5.37}$$

所以在求星表示时只须求出生成元 $E_{i\ n+1}$ 的表示矩阵即可．

从对易关系 (5.34) 中 (2) 式可看出，生成元 $E_{i\ n+1}$ 使 $E_{n+1\ n+1}$ 的本征值减 1，且生成元 $E_{1\ n+1}, \cdots, E_{n\ n+1}$ 构成 $gl(n,R)$ 的 [1] 秩不可约张量，分别对应 $\left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \cdots, \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$，分量．利用 Wigner-Eckart 定理，定义约化矩阵元为

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \middle| E_{n\ n+1} \middle| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n' \\ \gamma_n' \end{matrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n' \\ 0 & \gamma_n' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n' \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned} \tag{5.38}$$

利用已知的 $gl(n,R)$ 约化标量因子 $\left\langle \begin{matrix} 1 & \Gamma_n' \\ 0 & \gamma_n' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle$，把求 $E_{i\ n+1}$ 矩阵元的问题简化为求约化矩阵元的问题．

以 $\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1,j-1) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1,j-1) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right\rangle$ 分别从左和右作用于反对易关系

$$\{E_{n\ n+1}, E_{n+1\ n}\} = E_{n\ n} + E_{n+1\ n+1},$$

利用星表示条件，代入 $gl(n,R)$ 的 CG 系数，取相因子使约化矩阵元为实，可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{(x_{in}-x_{jn}+1)(x_{in}-x_{jn}-1)}}{|x_{in}-x_{jn}|} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle \\ &\times \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned} \tag{5.39}$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1,j-1) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1,j-1) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right\rangle$ 作用于反对易关系 $\{E_{n\ n+1}, E_{n\ n+1}\} = 0$, 代入 $gl(n,R)$ CG 系数，可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle$$

$$= -\sqrt{\frac{(x_{in}-x_{jn}+1)}{(x_{in}-x_{jn}-1)}} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle. \tag{5.40}$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i^2) \\ \check{\Gamma}_{n-1}((i-1)^2) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \check{\Gamma}_{n-1}((i-1)^2) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right\rangle$ 作用于

反对易关系 $\{E_{n\,n+1}, E_{n\,n+1}\} = 0$, 代入 $gl(n,R)$ CG 系数，可得约化矩阵元满足的齐次方程

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i^2) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle = 0. \tag{5.41}$$

当 $\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle \neq 0$ 时，必有

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i^2) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle = 0. \tag{5.41$'$}$$

(5.39),(5.40),(5.41) 包含所有独立的齐次方程. 从 (5.39) 和 (5.40) 可以解出

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$= \frac{(x_{in}-x_{jn}-1)}{(x_{in}-x_{jn})} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2. \tag{5.42}$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \check{\Gamma}_{n-1} \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \check{\Gamma}_{n-1} \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right\rangle$ 作用于反对易关系 $\{E_{n\,n+1}, E_{n+1\,n}\} = E_{n\,n} + E_{n+1\,n+1}$，可得约化矩阵元满足的非齐次方程

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(1) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_{jn} - x_{in} - 1} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(-j) \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&\quad + \frac{1}{a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k\,n}^0 - \sum_{q=2}^{n} x_{q\,n} + \hat{m} - n + 1 \right).
\end{aligned} \tag{5.43}
$$

从左和右分别以 $\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right|$ 和 $\left| \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \check{\Gamma}_{n-1}(i-1) \\ \gamma_{n-1} \end{matrix} \right\rangle$ 作用于反对易关系 $\{E_{n\,n+1}, E_{n+1\,n}\} = E_{n\,n} + E_{n+1\,n+1}$，，可得约化矩阵元满足的另一非齐次方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_{1\,n} - x_{i\,n} - 1}{x_{1\,n} - x_{i\,n}} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(1) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&\quad + \frac{1}{x_{1\,n} - x_{i\,n}} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{j\,n} - x_{i\,n} - 2}{(x_{jn} - x_{1n} - 1)(x_{jn} - x_{in} - 1)} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\,\Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(-j) \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&\quad + \frac{1}{a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k\,n}^0 - \sum_{q=2}^{n} x_{q\,n} + \hat{m} - n \right).
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

由 (5.43) 和 (5.44) 可以解出

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_{jn} - x_{in} - 1} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(-j) \end{matrix} \right\rangle^2 + \frac{1}{a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k\,n}^0 - \sum_{q=1}^{n} x_{q\,n} + x_{i\,n} + \hat{m} - n + 1 \right). \tag{5.45}$$

式 (5.45) 是约化矩阵元的递推关系，它包含 (5.43) 和 (5.44) 的结果.

取 $\Gamma_n = \Gamma_n^0$, 此对应于最高权态， $E_{n+1\ n+1}$ 的本征值为 $\hat{m}$, 注意到 $\Gamma_n^0(-j)$ 的 $E_{n+1\ n+1}$ 本征值为 $\hat{m}+1$, 这不可能出现，故从递推关系可得

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n^0(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n^0 \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{1}{a}(x_{i\,n}^0 + \hat{m} - n + 1). \tag{5.46}$$

反复利用 (5.42), 用数学归纳法可以得出当 $x_{i\,n} = x_{i\,n}^0$ 时，

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 = \frac{1}{a} \frac{\prod_{p\neq i}^{n}(x_{i\,n}^0 - x_{p\,n})}{\prod_{p\neq i}^{n}(x_{i\,n}^0 - x_{p\,n}^0)}(x_{i\,n}^0 + \hat{m} - n + 1). \tag{5.47}$$

当 $x_{i\,n} \neq x_{i\,n}^0$ 时，由 (5.41′) 可得上约化矩阵元平方为 0. 这样就决定了约化矩阵元的平方. 在约化矩阵元为实时，仍有正负号需要确定. 相因子正负号的规定，需要满足齐次方程 (5.39) 和 (5.40).

给定实参数 a 的正负号，式 (5.47) 也给出星表示的条件. 当 $a > 0$ 时，星表示要求对全部 i, 满足 $x_{i\,n}^0 + \hat{m} - n + 1 \geq 0$, 当 $a < 0$ 时，星表示要求对全部 i, 满足 $x_{i\,n}^0 + \hat{m} - n + 1 \leq 0$.

例如不可约表示 $(\hat{m},[0])$, 其约化矩阵元可以取为

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ [0] \\ [1] \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ [0] \\ [0] \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{\hat{m}}, \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ [0] \\ [1^i] \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ [0] \\ [1^{i-1}] \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{i(\hat{m}-i+1)},
\end{aligned} \tag{5.48}$$

其中 $i=1,\cdots,n$, 当 $\hat{m}\neq i-1$ 时, $(\hat{m},[0])$ 是 $pl(n,1)$ 的 2^n 维典型不可约表示. 当 $\hat{m}=i-1$ 时, $(\hat{m},[0])$ 是 $pl(n,1)$ 非典型不可约表示.

例如不可约表示 $(\hat{m},[1])$, 其约化矩阵元可以取为

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ [1] \\ [1^i] \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ [1] \\ [1^{i-1}] \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{(i-1)(\hat{m}-i+1)}, \\
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ [1] \\ [21^{i-1}] \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ [1] \\ [1^i] \end{matrix} \right\rangle = (-)^{i-1}\sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{\frac{(\hat{m}+1)}{i}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ [1] \\ [21^i] \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ [1] \\ [21^{i-1}] \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{\frac{(i-1)(i+1)(\hat{m}-i+1)}{i}},
\end{aligned} \tag{5.49}$$

其中前两式 $i=2,\cdots,n$, 第三式 $i=2,\cdots,n-2$. 当 $\hat{m}\neq i-1$ 时, $(\hat{m},[1])$ 是 $pl(n,1)$ 的典型不可约表示. 当 $\hat{m}=i-1$ 时, $(\hat{m},[1])$ 是 $pl(n,1)$ 非典型不可约表示.

设 a 为实参数, 奇元满足如 4.5 节所给的阶化厄米共轭条件

$$E^{\ddagger}_{n+1\ i} = -aE_{i\ n+1}. \tag{5.50}$$

阶化星表示矩阵元满足

$$
\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right| E_{n+1\ i} \left| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n' \\ \gamma_n' \end{matrix} \right\rangle
= (-)^{\deg(\Gamma_n')} a \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n' \\ \gamma_n' \end{matrix} \right| E_{i\ n+1} \left| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \\ \gamma_n \end{matrix} \right\rangle^{*} . \tag{5.51}
$$

所以在求阶化星表示时也只须求出生成元 $E_{i\ n+1}$ 的表示矩阵. 再用 $E_{i\ n+1}$ 的不可约张量性质, 也只要求出其约化矩阵元即可.

用阶化星表示矩阵元满足的条件 (5.51), 可得齐次方程 (5.39) 变为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle \\
&= \frac{\sqrt{(x_{in}-x_{jn}+1)(x_{in}-x_{jn}-1)}}{|x_{in}-x_{jn}|} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{5.52}
$$

齐次方程 (5.40) 和 (5.41) 未变. 从 (5.52) 和 (5.40) 可以解出

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i,j) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(j) \end{matrix} \right\rangle^2 \\
&= -\frac{(x_{in}-x_{jn}-1)}{(x_{in}-x_{jn})} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \right\| E \left\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2 .
\end{aligned} \tag{5.53}
$$

同样可以得到非齐次方程并解出递推关系

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$= -\frac{1}{x_{jn} - x_{in} - 1} \left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(-j) \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$+ (-)^{\deg(\Gamma_n)} \frac{1}{a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{k\,n}^0 - \sum_{q=1}^{n} x_{q\,n} + x_{i\,n} + \hat{m} - n + 1 \right). \tag{5.54}$$

同求星表示一样，从 $\Gamma_n = \Gamma_n^0$ 开始，可求出

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n^0(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n^0 \end{matrix} \right\rangle^2 = (-)^{\deg(\Gamma_n^0)} \frac{1}{a} (x_{i\,n}^0 + \hat{m} - n + 1). \tag{5.55}$$

用数学归纳法，当 $x_{i\,n} = x_{i\,n}^0$ 时，可得出

$$\left\langle \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n(i) \end{matrix} \middle\| E \middle\| \begin{matrix} \hat{m}\ \Gamma_n^0 \\ \Gamma_n \end{matrix} \right\rangle^2$$

$$= (-)^{\deg(\Gamma_n)} \frac{1}{a} \frac{\prod_{p \neq i}^{n} (x_{i\,n}^0 - x_{p\,n})}{\prod_{p \neq i}^{n} (x_{i\,n}^0 - x_{p\,n}^0)} (x_{i\,n}^0 + \hat{m} - n + 1). \tag{5.56}$$

同样 $x_{i\,n} \neq x_{i\,n}^0$ 时，也得上约化矩阵元平方为 0. 注意到 Γ_n 与 $\Gamma_n(i)$ 的阶不一样，不论实参数 a 为正或为负，只有满足条件 $x_{i\,n}^0 + \hat{m} - n + 1 = 0$, 才可能是阶化星表示. 所以阶化星表示都是非典型表示.

从 $pl(n,1)$ 的星表示和阶化星表示可以诱导出 $sl(n,1)$ 的星表示和阶化星表示. 取 $a = 1$, 从 $sl(n,1)$ 的星表示，可以诱导出 $su(n/1)$ 的不可约星表示.

类似地，$su(m,n)$ 的不可约表示可以从 $pl(m,n,R)$ 的不可约表示诱导得出. 在 [2] 中，用群链 $pl(m,n,R) \supset gl(m,R) \oplus gl(n,R)$ 来描述 $pl(m,n,R)$ 不可约表示空间的基，其偶元 $pl(m,n,R)_{\bar{0}} =$

$gl(m,R)\oplus gl(n,R)$ 的表示是已知的，而其奇元 $pl(m,n,R)_{\bar{1}}$ 可以分为

$$E_{t\ m+r},\quad t=1,\cdots,m,\quad r=1,\cdots,n,$$
$$E_{m+r\ t},\quad t=1,\cdots,m,\quad r=1,\cdots,n,$$

$E_{t\ m+r}$ 是 $gl(m)$ 的 $[1]$ 秩不可约张量，是 $gl(n)$ 的 $[1^{n-1}]$ 秩不可约张量，而 $E_{m+r\ t}$ 是 $gl(m)$ 的 $[1^{m-1}]$ 秩不可约张量，是 $gl(n)$ 的 $[1]$ 秩不可约张量. 若限于求星表示，利用奇元间反对易关系和 $gl(m), gl(n)$ 的约化系数，可以得到奇元约化矩阵元满足的方程. 这种方法，由于群链 $pl(m,n,R)\supset gl(m,R)\oplus gl(n,R)$ 描述 $pl(m,n,R)$ 不可约表示空间是不完全的，存在大量简并量子数，所以除一些简单表示外，并不能唯一解出所有的不可约星表示.

陈金全提出用群链

$$pl(m,n,R)\supset pl(m,n-1,R)\supset\cdots\supset pl(m,1,R)$$

来分类不可约表示空间的基，这种对不可约表示空间基的标记是完全的. 利用已知 $pl(m,1,R)$ 的不可约星表示，再求出 $pl(m,1,R)$ 的约化系数，用数学归纳法，应该可以求出 $pl(m,n,R)$ 的不可约星表示，当然也可以诱导出 $su(m,n)$ 的不可约星表示.

参 考 文 献

[1] Chen J Q, Chen X G, Gao M J. The Casimar invariants and Gelfand basis of the graded unitary group $SU(M/N)$. J Phys A: Math Gen, 1983,(16): 1361

[2] Chen J Q, Chen X G. The Gelfand basis and matrix elements of the graded unitary group $SU(M/N)$. J Phys A: Math Gen, 1983,(16): 3435

[3] Chen J Q, Gao M J, Chen X G. The Clebsch-Gordan coefficient for $SU(M/N)$ Gelfand basis. J Phys A: Math Gen, 1984, (17): 481

[4] 韩其智，李根道，宋行长等. 阶化李代数 $SU(m/n)$ 的不可约表示. 高能物理与核物理, 1981,(5): 546

[5] Han Q Z. The finite-dimensional star and graded star irreducible representations of $SU(N/1)$. Nuo Cim, 1981,(64A): 391

[6] Han Q Z, Sun H Z. Irreducible representations of superalgebras $B(1/1)$ and $B(0/2)$. Commu Theor Phys, 1983,(2): 1137

[7] Han Q Z, Sun H Z, Zhang M et al. The Fock wave functions as classified by the group chain $U(N/M) \supset OSP(N/M) \supset O(N) \otimes Sp(M)$. J Math Phys, 1985,(26): 1822

[8] Scheunert M, Nahm W, Rittenberg V. Irreducible representations of the $osp(2,1)$ and $spl(2,1)$ graded Lie algebras. J Math Phys, 1977,(18): 155

[9] 宋行长，韩其智，孙洪洲. 阶化李代数 $SU(2/1)$ 的不可约表示. 科学通报, 1980,(25): 201

[10] Sun H Z, Han Q Z. Irreducible representations of the Lie algebra $SU(n)$ and the graded Lie algebra $SU(n/1)$. Scien Sinica, 1981,(24): 914

第六章　转动不变的全同粒子体系波函数

本章介绍在转动不变条件下，全同粒子体系波函数的计算方法. 第一节通过简单实例提出问题，第二节讨论单角动量费密子的波函数，第三节讨论单角动量玻色子的波函数，第四节讨论 L-S 耦合费密子的波函数，第五节讨论含同位旋费密子的波函数.

6.1　问题的提出

众所周知中心力场中全同粒子运动在物理中起重要作用. 原子中电子的运动，原子核壳模型中质子与中子的运动，原子核相互作用玻色子模型中玻色子的运动都是全同粒子在中心力场中的运动. 从 30 年代起，构造全同粒子在中心力场中独立运动的波函数就是人们关注的问题.

粒子在中心力场中运动具有转动不变性，也就是粒子具有确定的角动量. 当多个粒子在中心力场中作独立运动，此多个粒子体系具有确定的总角动量. 全同粒子满足不可分辨原理，全同粒子体系波函数具有交换对称性. 在交换任两个全同粒子时，费密子体系波函数具有反对称性，玻色子体系波函数具有对称性，所以说转动不变性和交换对称性是构造波函数时必需首先考虑的两个问题.

现从一个简单例子来讨论此问题. 设在中心力场中运动的全同费密子体系，设每个费密子具有相同的角动量 $j=9/2$，和相同的其他量子数，不同的角动量 z 方向投影可取值为 $m=9/2,7/2,\cdots,-9/2$. 以后将角动量 z 方向投影简称为投影. 在坐标表象，取第 i 个粒子的坐标为 x_i，略去相同的量子数不记，把第 i 个费密子投影为 m_j 的波函数记为 $\phi_{m_j}(x_i)$. 若体系有两个费密子，通过角

动量耦合可以得到具有转动不变的波函数为

$$\Phi_{\alpha\ J\ M}(x_1,x_2)=\sum_{m_1\ m_2}\phi_{m_1}(x_1)\phi_{m_2}(x_2)\langle 9/2\ m_1\ 9/2\ m_2|J\ M\rangle, \tag{6.1}$$

其中 J 和 M 分别表示体系的总角动量及其 z 方向投影， α 为其他量子数. 当仅考虑角动量耦合时， J 可以取 $J=9,8,\cdots,0,$ 等值. 但由 CG 系数对称性知 $J=9,7,\cdots,1,$ 等奇数时不满足交换对称性，所以只有当 $J=8,6,\cdots,0,$ 等偶数时，式 (6.1) 才给出既满足转动不变又满足交换对称的波函数. 从此也可以看出，用简单角动量耦合的方法，加上 CG 系数的对称性，对只有两个全同粒子的体系，比较容易得出其总角动量的可取值和波函数.

当体系有三个费密子时，求总角动量的可取值和波函数问题就不那么简单. 仍考虑单个粒子角动量为 9/2, 用 Slater 行列式可以得到满足交换对称的波函数,

$$\begin{aligned}\Phi_{m_1\ m_2\ m_3}(x_1,x_2,x_3)&=\sum_P(-)^P P\phi_{m_1}(x_1)\phi_{m_2}(x_2)\phi_{m_3}(x_3)\\&=\frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{vmatrix}\phi_{m_1}(x_1)&\phi_{m_1}(x_2)&\phi_{m_1}(x_3)\\\phi_{m_2}(x_1)&\phi_{m_2}(x_2)&\phi_{m_2}(x_3)\\\phi_{m_3}(x_1)&\phi_{m_3}(x_2)&\phi_{m_3}(x_3)\end{vmatrix},\end{aligned} \tag{6.2}$$

其中 P 是 x_1,x_2,x_3 的置换算符. 显然 (6.2) 式给出的波函数满足交换对称性，并且还是角动量投影的本征函数. 因体系的总角动量算符为此三个粒子角动量之和，即

$$J_0=J_z=\sum_{k=1}^{3}J_z(k),$$

$$J_{\pm1}=\mp(J_x\pm\mathrm{i}J_y)/\sqrt{2}=\sum_{k=1}^{3}J_{\pm1}(k),$$

故有

$$J_0\, \Phi_{m_1\, m_2\, m_3}(x_1, x_2, x_3) = (m_1 + m_2 + m_3)\Phi_{m_1\, m_2\, m_3}(x_1, x_2, x_3). \tag{6.3}$$

已知费密子体系要满足泡利不相容原理，不失一般性，可取 $m_1 > m_2 > m_3$. 三个角动量为 9/2 的体系，总角动量投影 M 取固定值时，m_1, m_2, m_3, 的可取值由表 6.1 给出. 已知在总角动量为 J 时，投影可取 $M = J, J-1, \cdots, -J$ 等值，由表 6.1 可看出， J 可取 $J = 21/2, 17/2, 15/2, 13/2, 11/2, (9/2)^2, \cdots$.

表 6.1 $(9/2)^3$ **总角动量投影**M**含** m_1, m_2, m_3 **组态**

M	21/2	19/2	17/2		15/2		
m_1	9/2	9/2	9/2	9/2	9/2	9/2	7/2
m_2	7/2	7/2	7/2	5/2	7/2	5/2	5/2
m_3	5/2	3/2	1/2	3/2	−1/2	1/2	3/2

M	13/2				11/2				
m_1	9/2	9/2	9/2	7/2	9/2	9/2	9/2	7/2	7/2
m_2	7/2	5/2	3/2	5/2	7/2	5/2	3/2	5/2	3/2
m_3	−3/2	−1/2	1/2	1/2	−5/2	−3/2	−1/2	−1/2	1/2

M	9/2						
m_1	9/2	9/2	9/2	9/2	7/2	7/2	5/2
m_2	7/2	5/2	3/2	1/2	5/2	3/2	3/2
m_3	−7/2	−5/2	−3/2	−1/2	−3/2	−1/2	1/2

⋮

但式 (6.2) 给出的却不是总角动量 J^2 的本征函数，因此不满足转动不变性. 设 $|(9/2)^3\, \alpha\, J\, M\rangle$ 为既满足交换对称又满足转动不变的正交归一波函数，其中 J, M 分别为体系的总角动量及投影，α 为其他附加量子数. 由于式 (6.2) 给出的波函数具有确定的角动

量投影，所以波函数 $\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ J\ M\rangle$ 可以用它展开，

$$\begin{aligned}&\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ J\ M\rangle\\&=\sum_{m_1,m_2,m_3}\Phi_{m_1\ m_2\ m_3}(x_1,x_2,x_3)\langle m_1\ m_2\ m_3|\alpha\ J\ M\rangle,\end{aligned}\tag{6.4}$$

其中 $M=m_1+m_2+m_3$. 若求出了展开系数 $\langle m_1\ m_2\ m_3|\alpha\ J\ M\rangle$，也就求出了所需的波函数. 可以通过 $J_{\pm1}$ 对 (6.4) 式的作用，并利用归一化条件来求展开系数.

例如对 $J=M=21/2$, 唯一对应于 $m_1=9/2$, $m_2=7/2$, $m_3=5/2$ 的态. 式 (6.4) 的展开只有一项，利用波函数的正交归一性可得

$$\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ 21/2\ 21/2\rangle=\Phi_{9/2\ 7/2\ 5/2}(x_1,x_2,x_3).$$

从上波函数出发，通过 J_{-1} 对波函数的逐次作用，可以得到 $J=21/2$, $M=19/2,17/2,\cdots$ 的波函数，

$$\begin{aligned}&\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ 21/2\ 19/2\rangle=\Phi_{9/2\ 7/2\ 3/2}(x_1,x_2,x_3),\\&\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ 21/2\ 17/2\rangle\\&\quad=\sqrt{2/5}\Phi_{9/2\ 5/2\ 3/2}(x_1,x_2,x_3)+\sqrt{3/5}\Phi_{9/2\ 7/2\ 1/2}(x_1,x_2,x_3),\\&\qquad\vdots\end{aligned}$$

对 $J=M=19/2$ 的态，式 (6.4) 的展开也只有一项，用 J_{+1} 对其作用有

$$\begin{aligned}&J_{+1}\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ 19/2\ 19/2\rangle\\&\quad=-\sqrt{21/2}\Phi_{9/2\ 7/2\ 5/2}(x_1,x_2,x_3)\langle 9/2\ 7/2\ 3/2|\alpha\ 19/2\ 19/2\rangle\\&\quad=0,\end{aligned}$$

所以 $\langle 9/2\ 7/2\ 3/2|\alpha\ 19/2\ 19/2\rangle=0$, 因此不存在 $J=19/2$ 的态. 对 $J=M=17/2$ 的态，式 (6.4) 的展开有两项，用 J_{+1} 对其作用

有

$$
\begin{aligned}
&J_{+1}\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ 17/2\ 17/2\rangle \\
&\quad = -\sqrt{12}\Phi_{9/2\ 7/2\ 3/2}(x_1,x_2,x_3)\langle 9/2\ 7/2\ 1/2|\alpha\ 17/2\ 17/2\rangle \\
&\qquad -\sqrt{8}\Phi_{9/2\ 7/2\ 3/2}(x_1,x_2,x_3)\langle 9/2\ 5/2\ 3/2|\alpha\ 17/2\ 17/2\rangle \\
&\quad = 0,
\end{aligned}
$$

可得

$$
\langle 9/2\ 5/2\ 3/2|\alpha\ 17/2\ 17/2\rangle = -\sqrt{3/2}\langle 9/2\ 7/2\ 1/2|\alpha\ 17/2\ 17/2\rangle,
$$

再利用正交归一条件可得

$$
\begin{aligned}
&\langle x_1,x_2,x_3|(9/2)^3\ \alpha\ 17/2\ 17/2\rangle \\
&\quad = -\sqrt{3/5}\Phi_{9/2\ 5/2\ 3/2}(x_1,x_2,x_3)+\sqrt{2/5}\Phi_{9/2\ 7/2\ 1/2}(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}
$$

从上式出发, 通过 J_{-1} 对波函数的逐次作用, 也可以得到 $J=17/2$, $M=15/2,\cdots$ 的波函数.

显然上面的做法, 不仅适用于费密子, 也适用于玻色子; 不仅适用于 $j=9/2$, 也适用于其他 j, 不仅适用于有三个全同粒子的体系, 也适用于有更多全同粒子的体系. 这就是通常说的 m-scheme 方法. m-scheme 方法容易为人接受, 也容易写成计算程序以备应用. 但对单粒子角动量大, 粒子数多的全同粒子体系, 因为同一总角动量和投影的态含组态数过大, 实现波函数的具体计算是相当困难的.

仍考虑单个粒子角动量为 j 的三个全同费密子体系, 用角动量耦合可以得到具有确定总角动量为 J, 投影为 M 的波函数, 但不满足交换对称. 这些波函数组成一个比物理空间大的超完备空间, 满足交换对称的物理空间波函数可以从这超完备空间中投影出来.

为解决这问题, 先考虑三个全同粒子分别处于不同角动量 j_a, j_b,j_c 的态上. 当第一, 第二, 第三个粒子分别处于 j_a,j_b,j_c 时,

记第一和第二个粒子耦合成角动量 $J_{1\,2}$，$J_{1\,2}$ 与第三个粒子再耦合成总角动量 J, 投影 M 的波函数为 $\psi((j_a(1)\,j_b(2))J_{1\,2},j_c(3),J\,M)$. 用交换算符 $\sum_P(-)^P P$ 使其反对称化，可得波函数为

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{1}{3!}}\{\psi((j_a(1)j_b(2))J_2,j_c(3),J\,M)+\psi((j_a(2)j_b(3))J_2,j_c(1),J\,M)\\&+\psi((j_a(3)\,j_b(1))J_2,j_c(2),J\,M)-\psi((j_a(2)\,j_b(1))J_2,j_c(3),J\,M)\\&-\psi((j_a(3)\,j_b(2))J_2,j_c(1),J\,M)-\psi((j_a(1)\,j_b(3))J_2,j_c(2),J\,M)\}.\end{aligned}\tag{6.5}$$

当 $j_a=j_b=j\neq j_c$ 时，式 (6.5) 的波函数变为

$$\begin{aligned}&C\{\psi((j^2(12))J_2,j_c(3),J\,M)+\psi((j^2(23))J_2,j_c(1),J\,M)\\&\quad-\psi((j^2(13))J_2,j_c(2),J\,M)\},\end{aligned}\tag{6.6}$$

其中 C 为归一化常数，$J_2=0,2,\cdots,2j-1$ 等偶数. 当 $j_a=j_b=j_c=j$ 时，由三个角动量重耦合 Wigner $6j$ 系数 (1.101) 及 CG 系数对称性，可得

$$\begin{aligned}&\psi((j^2(23))J_2,j(1),J\,M)\\&=\sum_{J_1}(-)^{J_2}\sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)}\begin{Bmatrix} j & j & J_1\\ j & J & J_2\end{Bmatrix}\\&\quad\times\psi((j^2(12))J_1,j(3),J\,M),\\&\psi((j^2(13))J_2,j(2),J\,M)\\&=\sum_{J_1}(-)^{1+J_1+J_2}\sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)}\begin{Bmatrix} j & j & J_1\\ j & J & J_2\end{Bmatrix}\\&\quad\times\psi((j^2(12))J_1,j(3),J\,M).\end{aligned}\tag{6.7}$$

将 (6.7) 代入 (6.6), 可得满足交换对称的波函数

$$\begin{aligned}&\psi(j^3\,J\,M)\\&=C\sum_{J_1=\text{偶}}\left[\delta_{J_2\,J_1}+2\sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)}\begin{Bmatrix} j & J_1 & j\\ j & J_2 & J\end{Bmatrix}\right]\end{aligned}$$

$$\times\psi((j^2(12))J_1, j(3), J\ M). \tag{6.8}$$

其中二体波函数 $\psi((j^2(12))J_1)$ 在 J_1 为偶时，是满足转动不变和交换对称的波函数，可称为母态. 将其再与一个粒子的波函数耦合成具有确定角动量的波函数 $\psi((j^2(12))J_1, j(3), J\ M)$, 此波函数不满足交换对称，它们构成超完备空间. 对超完备空间进行投影，即可得到满足交换对称的物理波函数. 代入归一化常数，式 (6.8) 中系数

$$\langle j^3\ J\ M [\!\} j^2(J_1)\ j\ J\rangle = \langle 3\ J\ M [\!\} 2\ (J_1)\ j\ J\rangle$$
$$= \frac{\delta_{J_{1\,2}\,J'_{1\,2}} + 2\sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)}\begin{Bmatrix} j & J_1 & j \\ j & J_2 & J \end{Bmatrix}}{\sqrt{3+6(2J+1)\begin{Bmatrix} j & J_2 & j \\ j & J_2 & J \end{Bmatrix}}} \tag{6.9}$$

称为母分系数 (coefficients of fractional parentage), 简称为 CFP 系数. 它们与角动量的投影无关. 由于它们是投影算符矩阵元，所以不是幺正变换，这也就是用符号 $[\!\}$ 替代符号 $|$ 的原因.

这种求转动不变全同粒子体系波函数方法，早年由 Bacher, Goudsmit 和 Racah 提出，称为 J-T scheme 方法. 将已知的 $n-1$ 个粒子的波函数与第 n 个粒子的波函数耦合成具有确定角动量的波函数，经交换对称算符的作用，投影出 n 个全同粒子体系的转动不变的波函数. 这是一种递推的方法， Redmond 给出 CFP 满足下递推关系

$$n\langle j^n(\alpha_0\ J_0)J [\!\} j^{n-1}(\alpha_0\ J_0)\ j\ J\rangle\langle j^n(\alpha_0\ J_0)J [\!\} j^{n-1}(\alpha_1\ J_1)\ j\ J\rangle$$
$$= \delta_{\alpha_1\,\alpha_0}\delta_{J_1\,J_0} + (n-1)\sum_{\alpha_2\,J_2}(-)^{J_0+J_1}\sqrt{(2J_0+1)(2J_1+1)}$$

$$
\times \begin{Bmatrix} J_2 & j & J_1 \\ J & j & J_0 \end{Bmatrix} \langle j^{n-1}\ \alpha_0\ J_0 \|\} j^{n-2}(\alpha_2\ J_2)\ j\ J_0\rangle
$$

$$
\times \langle j^{n-1}\ \alpha_1\ J_1 \|\} j^{n-2}(\alpha_2\ J_2)\ j\ J_1\rangle, \tag{6.10}
$$

其中 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 表示其他附加量子数. 许多程序都用此递推关系来实现波函数的计算. 但此递推关系计算出的波函数除角动量外, 不能直接给出其他有重要物理意义的量子数, 比如在原子核中反映对关联的辛弱数 (seniority).Bayman, Lande 和 Ginocchio 提出将由式 (6.10) 计算出的波函数, 再对 $SO(2j+1)$ 群的 Casimir 算子对角化, 从而求出具有辛弱数的费密子体系转动不变的波函数.

显然用粒子数表象求满足交换对称的波函数更为方便. 仍考虑具有角动量 j, 投影 m 的费密子体系, 取 $a^\dagger_{j\,m}, a_{j\,m}$ 分别为粒子的产生和湮没算符, $|0\rangle$ 为真空态, 记 n 个粒子具有角动量及投影为 J 和 M 的态为 $|n\ \alpha\ J\ M\rangle$, α 为其他附加量子数, 则单粒子态为

$$
|1\ \alpha\ j\ m\rangle = a^\dagger_{j\,m}|0\rangle,
$$

两个粒子态为

$$
|2\ \alpha\ J\ M\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(a^\dagger_j a^\dagger_j)^J_M|0\rangle,
$$

其中

$$
(a^\dagger_j a^\dagger_j)^J_M = \sum_{m_1\,m_2} \langle j\ m_1\ j\ m_2 | J\ M\rangle a^\dagger_{j\,m_1} a^\dagger_{j\,m_2}
$$

是两个产生算符按角动量耦合方式, 耦合成具有确定总角动量 J 及投影 M 的算符. 此算符作用于真空态, 得到既满足转动不变又满足交换对称的态.

推广这种方法, 将 n 个粒子耦合成具有确定总角动量 J 和投影 M 的算符 $Z(n\ \alpha\ J\ M)$, 则 $Z(n\ \alpha\ J\ M)|0\rangle$ 是 n 个粒子既满足转动不变又满足交换对称的正交归一态. 但这并不是说这样可以避

免 CFP 系数的计算，恰恰相反，这时态的归一化常数与 CFP 系数有关.

设 $n-1$ 个粒子的产生算符 $Z(n-1\,\alpha'\,J'\,M')$ 已知， n 个粒子的态为 $|n\,\alpha\,J\,M\rangle$, 注意产生算符是转动群 $SO(3)$ 的 j 秩不可约张量，有

$$\begin{aligned}&\langle j^n\,\alpha\,J\|j^{n-1}\,\alpha'\,j\,J'\rangle\\&=\langle n\,\alpha\,J\,M|\sqrt{1/n}(a_j^\dagger Z(n-1\,\alpha\,J'))^J_M|0\rangle\\&=\sqrt{1/n}\langle n\,\alpha\,J\|a_j^\dagger\|n-1\,\alpha'\,J'\rangle,\end{aligned}\tag{6.11}$$

其中 $\langle n\,\alpha\,J\|a_j^\dagger\|n-1\,\alpha'\,J'\rangle$ 为 $a^\dagger_{j\,m}$ 的约化矩阵元，可取相因子使其为实. 体系的总粒子数算符为 $\sum_m a^\dagger_{j\,m}a_{j\,m}$, 则有

$$\begin{aligned}&\langle n\,\alpha\,J\,M|\sum_m a^\dagger_{j\,m}a_{j\,m}|n\,\alpha\,J\,M\rangle=n\\&=\sum_{\alpha'\,J'}\langle n\,\alpha\,J\|a_j^\dagger\|n-1\,\alpha'\,J'\rangle^2\\&=\sum_{\alpha'J'}\sqrt{n}\langle j^n\,\alpha\,J\|j^{n-1}\,\alpha'\,j\,J'\rangle\langle n\,\alpha\,J\,M|(a_j^\dagger Z(n-1\,\alpha\,J'))^J_M|0\rangle.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&Z(n\,\alpha\,J\,M)\\&=\sqrt{\frac{1}{n}}\sum_{\alpha'\,J'}\langle j^n\,\alpha\,J\|j^{n-1}\,\alpha'\,j\,J'\rangle(a_j^\dagger Z(n-1\,\alpha\,J'))^J_M.\end{aligned}\tag{6.12}$$

式 (6.12) 给出由 $n-1$ 个粒子的算符 $Z(n-1\,\alpha\,J'\,M')$ 组成 n 个粒子的算符 $Z(n\,\alpha\,J\,M)$ 时，其归一化常数与 CFP 系数的关系.

用粒子数表象方法，把求 CFP 系数的问题变成求产生算符的约化矩阵元问题，给计算带来许多方便，并且可以推广到带有其他矢量量子数，如自旋，同位旋等情况. Zwart 的 GENESIS 程序就基本是按这样办法写的. 下面我们也将采用粒子数表象来讨论不同的全同粒子体系波函数问题.

6.2 单角动量费密子的波函数

单角动量费密子的 CFP 系数，原则上可由 (6.10) 式递推求出， GENESIS 程序也是按此写的. 但实际计算中，因为超完备空间中存在许多线性相关的态，过大的舍入误差常使计算不能正常进行. 加上 (6.10) 不显含辛弱数，这不仅加大计算量，也使舍入误差问题更为突出. 另外在计算程序中，并没有事先给出重复度，这自然也不利于控制舍入误差. 以下将按李代数链分类波函数，李代数链的约化， CFP 系数的因子化和显含辛弱数的递推关系等方面，讨论并解决这些问题.

6.2.1 李代数链分类波函数

将具有角动量 j, 投影 m 的费密子产生算符和湮没算符简写为 $a^\dagger_{j\,m} = a^\dagger_m$, $a_{j\,m} = a_m$. 它们满足下反对易关系,

$$
\begin{aligned}
&\{a^\dagger_m, a^\dagger_{m'}\} = \{a_m, a_{m'}\} = 0, \\
&\{a^\dagger_m, a_{m'}\} = \delta_{m\,m'}.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

体系的总角动量算符为

$$
\begin{aligned}
J_0 &= \sum_m m a^\dagger_m a_m, \\
J_{\pm 1} &= \mp \sum_m \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)/2}\, a^\dagger_{m\pm 1} a_m,
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

$J_0, J_{\pm 1}$ 是空间转动代数 $so(3)$ 的生成元. 体系转动不变，就是要在 $so(3)$ 的一个不可约表示空间中变，即具有确定的总角动量 J.

取 $N = 2j + 1$, 具有确定角动量 j 的全同费密子体系的巨希耳伯特 (grand Hilbert) 空间由算符

$$
\begin{aligned}
&a^\dagger_m a_m - 1/2, \quad a^\dagger_m, \quad a_m, \\
&a^\dagger_m a^\dagger_{m'}, \quad a_m a_{m'}, \quad a^\dagger_m a_{m'}, \\
&m, m' = j, j-1, \cdots, -j, \quad m \neq m',
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

生成，它们构成李代数 $so(2N+1)$ 的生成元. 其 Cartan 子代数的基为 $H_m = a_m^\dagger a_m - 1/2$, $m = j, j-1, \cdots, -j$. 代表费密子巨希耳伯特空间的是 $so(2N+1)$ 的 $(1/2, 1/2, \cdots, 1/2) = (1/2^N)$ 不可约表示，其最高权态是每一个磁量子数上有一个粒子.

$so(2N+1)$ 有子代数 $so(2N)$, 其生成元为

$$\begin{aligned}
&a_m^\dagger a_m - 1/2, \\
&a_m^\dagger a_{m'}^\dagger, \quad a_m a_{m'}, \quad a_m^\dagger a_{m'}, \\
&m, m' = j, j-1, \cdots, -j, \quad m \neq m'.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

即除了单个粒子的产生和湮没算符之外，包含 $so(2N+1)$ 的全部生成元，其 cartan 子代数基与 $so(2N+1)$ 一样. 所以有偶数个粒子的态与有奇数个粒子的态，在 $so(2N)$ 的作用下，不会相互转化. 不可约表示 $((1/2)^N)$ 给出有偶数个粒子的巨希耳伯特空间，不可约表示 $((1/2)^{N-1}, -1/2)$ 给出有奇数个粒子的巨希耳伯特空间. $so(2N+1) \supset so(2N)$ 的约化规则为

$$((1/2)^N) = ((1/2)^N) \oplus ((1/2)^{N-1}, -1/2). \tag{6.17}$$

保持粒子数守恒的最大李代数为 $u(N)$. $u(N)$ 的 Cartan 子代数基为 $H_m = a_m^\dagger a_m$, $m = j, j-1, \cdots, -j$. 其他生成元为 $a_m^\dagger a_{m'}$, 其中 $m, m' = j, j-1, \cdots, -j$, $m \neq m'$. 具有 n 个粒子的空间构成 $u(N)$ 的一个不可约表示空间，用最高权 $[1^n]$ 标记此不可约表示.

为了以后写转动不变的形式方便，常将 $u(N)$ 的生成元写成 $so(3)$ 的不可约张量形式. 由 $a_m^\dagger$ 与 $so(3)$ 生成元的对易关系可以看出， $a_m^\dagger$ 是 $so(3)$ 的 j 秩不可约张量，而 a_m 却不是 $so(3)$ 的不可约张量. 可以证明 $\tilde{a}_m = (-)^{j+m} a_{-m}$ 是 $so(3)$ 的 j 秩不可约张量，所以在写不可约张量形式时，总用 $\tilde{a}_m$ 代替 a_{-m}. $u(N)$ 生成元的不可约张量形式为

$$(a^\dagger \tilde{a})_q^k = \sum_{m\, m'} \langle j\ m\ j\ m' | k\ q \rangle a_m^\dagger \tilde{a}_{m'},$$

$$k = 0, 1, \cdots, 2j, \qquad q = k, k-1, \cdots, -k. \tag{6.18}$$

它们满足下对易关系

$$\begin{aligned}[(a^\dagger \tilde{a})^k_q, (a^\dagger \tilde{a})^{k'}_{q'}] &= \sqrt{(2k+1)(2k'+1)} \\ &\times \sum_{k''} \langle k\, q\, k'\, q' | k''\, q'' \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} k & k' & k'' \\ j & j & j \end{array} \right\} ((-)^{k+k'} - (-)^{k''}) (a^\dagger \tilde{a})^{k''}_{q''}.\end{aligned} \tag{6.19}$$

记 $\hat{n}_f = \sum_m a^\dagger_m a_m$ 为体系的总费密子数算符，则 $(a^\dagger \tilde{a})^0_0 = \hat{n}_f/\sqrt{N}$. $\hat{n}_f$ 可看作是 $u(1)_n$ 的生成元， $u(N) = u(1) \oplus su(N)$. 在等价原则下， $su(N)$ 的不可约表示也用 $[1^n]$ 标记，但 $[1^N]$ 与 $[0]$ 等价． $su(N)$ 是 $so(2N)$ 保持粒子数守恒的子代数.

由对易关系 (6.19) 可以看出，当 $k = 1, 3, \cdots, 2j$ 等奇数时，$(a^\dagger \tilde{a})^k_q$ 构成 $su(N)$ 的子代数，用

$$(a^\dagger \tilde{a})^k_q = \frac{1}{2} \sum_{m\, m'} \langle j\, m\, j\, m' | k\, q \rangle (a^\dagger_m \tilde{a}_{m'} + a^\dagger_{m'} \tilde{a}_m),$$

可以得到其生成元的非耦合形式为

$$\Xi_{m\, m'} = a^\dagger_m \tilde{a}_{m'} + a^\dagger_{m'} \tilde{a}_m.$$

由此可看出此为李代数 $sp(N)$. 其 Cartan 子代数的基为 $H_m = (-)^{j+m} \Xi_{m\, -m} = a^\dagger_m a_m - a^\dagger_{-m} a_{-m}$, $m = j, j-1, \cdots, 1/2$. 当 m 和 $-m$ 态上各有一个粒子并耦合成零角动量时，称为一对粒子. H_m 是投影为 m 的粒子数减去投影为 $-m$ 的粒子数，而 $sp(N)$ 的生成元不会变成对的粒子为不成对的粒子，并且最高权态角动量与其投影相等，所以 $sp(N)$ 的不可约表示 (1^ν) 对应有 ν 个不成对粒子的态. 量子数 ν 称为辛弱数，是描述对关联的重要量子数.

设 $P^\dagger, \tilde{P}$ 分别为对产生和对湮没算符，

$$P^\dagger = \sqrt{\frac{2j+1}{2}} (a^\dagger a^\dagger)^0_0, \quad \tilde{P} = \sqrt{\frac{2j+1}{2}} (\tilde{a}\tilde{a})^0_0, \tag{6.20a}$$

$so(2N)$ 还有子代数 $su(2)_q$，其生成元为 $Q_0, Q_{\pm1}$，

$$Q_0 = \frac{N}{4} - \frac{1}{2}\hat{n}_f, \qquad Q_{-1} = \frac{1}{2}P^\dagger, \qquad Q_{+1} = \frac{1}{2}\tilde{P}, \tag{6.20b}$$

满足 $su(2)$ 对易关系

$$[Q_0, Q_{\pm1}] = \pm Q_{\pm1}, \quad [Q_{+1}, Q_{-1}] = -Q_0.$$

$su(2)_q$ 称为准自旋 (quasispin) 代数. $sp(N)$ 的生成元与 $su(2)_q$ 的生成元是对易的，所以 $sp(N)$ 是 $su(2)_q$ 不变的.

表 6.2

李代数	生成元	不变量	表示
$u(N)$	$E_{m\,m'} = a^\dagger_m a_{m'}$ $(a^\dagger\tilde{a})^k_q$	$\hat{n}_f$ $\dfrac{\hat{n}_f(N+1-\hat{n}_f)}{2N}$	$[1^n]$
$sp(N)$	$\Xi_{m\,m'} = a^\dagger_m\tilde{a}_{m'} + a^\dagger_{m'}\tilde{a}_m$ $(a^\dagger\tilde{a})^k_q \;\; k=$奇	$\hat{n}_f(N+2-\hat{n}_f)/2+P^\dagger\tilde{P}=$ $\sum_{k=\text{奇},q}(-)^q(a^\dagger\tilde{a})^k_q(a^\dagger\tilde{a})^k_{-q}$	(1^ν)
$so(3)$	$J_q=\sqrt{j(j+1)(2j+1)/3}(a^\dagger\tilde{a})^1_q$	$J^2=-J_{+1}J_{-1}-J_{-1}J_{+1}+J_0^2$	J
$su(2)_q$	$Q_0 = N/4 - \hat{n}_f/2,$ $Q_{-1} = P^\dagger/2 \;\; Q_{+1} = \tilde{P}/2$	$Q_0(Q_0+1) - \frac{1}{2}P^\dagger\tilde{P}$	Q

描述转动不变的单角动量费密子体系的群链，也即是其相应的李代数链，可以归纳为以下两条：

$$so(2N+1) \supset so(2N) \supset su(N) \supset sp(N) \supset so(3), \tag{6.21}$$

$$so(2N+1) \supset so(2N) \supset sp(N) \otimes su(2)_q \supset so(3) \otimes su(2)_q. \quad (6.22)$$

由于在原子分子和原子核等物理问题中，粒子数是固定的，对粒子数确定的态，常用 $u(N) \supset sp(N) \supset so(3)$ 链来分类波函数. 表 6.2 给出此链中每个李代数的生成元，不变量和不可约表示标记，其中除 $u(N)$ 的不变量 $\hat{n}_f$ 之外，其余均为 Casimir 算子.

波函数可以写为 $|n\ \nu\ \alpha\ J\ M\rangle$，其中 M 是 J 的投影量子数，α 是附加量子数，用来反映 $sp(N) \supset so(3)$ 是非简单约化的.

6.2.2 李代数链的约化

对 $u(N)$ 的不可约表示 $[1^n]$，按李代数链 $u(N) \supset sp(N)$ 约化，即 $[1^n] = \oplus_\nu (1^\nu)$. 设 $n_0 = \min(n, N-n)$，有

$$\begin{aligned} &\nu = n_0, n_0-2, \cdots, 0, \qquad n = 偶, \\ &\nu = n_0, n_0-2, \cdots, 1, \qquad n = 奇. \end{aligned} \quad (6.23)$$

只要再求出 $sp(N) \supset so(3)$ 的约化，则求出了波函数所需的全部约化规则. 此处采用先求 $u(N) \supset so(3)$ 的约化规则，再利用已知的 $u(N) \supset sp(N)$ 约化规则，求出 $sp(N) \supset so(3)$ 的约化规则.

$u(N)$ 的 Cartan 子代数的基为 $a_j^\dagger a_j, a_{j-1}^\dagger a_{j-1}, \cdots, a_{-j}^\dagger a_{-j}$，在其不可约表示 $[1^n]$ 空间，有 n 个粒子在不同投影量子数 $j, j-1, \cdots, -j$ 的态上填充. 一种填充方式给出一次一定的角动量投影 M，即给出 $so(3)$ 表示的一个权，有的 M 会出现多次. 注意到费密子满足泡利不相容原理，不失一般性可规定 $m_1 > m_2 > \cdots > m_n$. $[1^n]$ 对应的 M 最大值为 $\hat{M} = j+(j-1)+\cdots+(j-n+1)$，此时对应唯一的填充方式为 $m_1 = j, m_2 = j-1, \cdots, m_n = j-n+1$. 所以 $[1^n]$ 包含的最大角动量即为 $\hat{M}$. 而角动量 J 有投影 $M = J, J-1, \cdots, -J$，从所有的 M 量子数中减去 $\hat{M}, \hat{M}-1, \cdots, -\hat{M}$，剩余的最大的 M 量子数又对应次大的角动量. 如此类推，可以逐步求出所有可能的角动量. 上节 $(9/2)^3$ 包含的所有可能填充由表 6.1 给出，其包含的角动量正是用此法得出的.

以 $P(\xi)$ 表投影为 $M = \hat{M} - \xi$ 时可能有的填充方式的数目. 如果 $P(\xi), P(\xi-1)$ 已知, 则 $u(N)$ 的 $[1^n]$ 表示包含 $J = \hat{M} - \xi$ 的重复度 $\beta(n, J) = P(\xi) - P(\xi - 1)$. 每一种填充方式对应的各个粒子投影为 $j - \xi_1 > (j-1) - \xi_2 > \cdots > (j-n+1) - \xi_n$, 所以

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n, \tag{6.24a}$$

并且

$$\xi_n \geq \xi_{n-1} \geq \cdots \geq \xi_2 \geq \xi_1 \geq 0. \tag{6.24b}$$

单个粒子角动量投影的最小值为 $-j$, 所以还需满足

$$\xi_n \leq N - n. \tag{6.24c}$$

设 $[\xi_a, \xi_{a-1}, \cdots, \xi_1]$ 对应于行不大于 a, 列不大于 b 的杨图, 如图 6.1. 可能的杨图个数即为 $P_{a\,b}(\xi)$, 称为 ξ 的 a 行 b 列划分数,

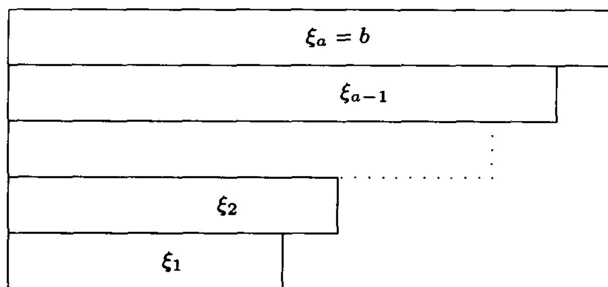


图 6.1 a 行 b 列杨图

其中

$$\begin{aligned} &\xi_a \geq \xi_{a-1} \geq \cdots \geq \xi_2 \geq \xi_1 \geq 0, \\ &\xi_a \leq b. \end{aligned} \tag{6.25}$$

ξ 的 a 行 b 列划分数可用递推方法求出. 由杨图的对称性, 可得

$$\begin{aligned} P_{a\,b}(\xi) &= P_{b\,a}(\xi), \\ P_{a\,b}(\xi) &= P_{a\,b}(ab - \xi). \end{aligned} \tag{6.26a}$$

显然按定义有

$$P_{a\,b}(0)=P_{a\,b}(1)=1,$$

$$P_{1\,b}(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\le b,\\ 0, & \xi>b.\end{cases} \tag{6.26b}$$

ξ 的不大于 a 行，不大于 b 列的划分数满足下递推关系，

$$P_{a\,b}(\xi)=P_{a-1\,b}(\xi)+P_{a\,b-1}(\xi-a), \tag{6.27a}$$

用递推关系容易求出所需的任意划分数.

在 $u(N)$ 的 $[1^n]$ 不可约表示中， $M=\hat{M}-\xi$ 的填充方式 $P(\xi)=P_{n\,N-n}(\xi)$, 所以 $J=\hat{M}-\xi$ 的重复度为

$$\beta(n,J)=P_{n\,N-n}(\xi)-P_{n\,N-n}(\xi-1). \tag{6.27b}$$

再利用已知的 $u(N)\supset sp(N)$ 约化规则，可得在 $sp(N)$ 的 (1^ν) 不可约表示中， $J=\hat{M}-\xi$ 的重复度 $\gamma(\nu,J)$ 为

$$\gamma(\nu,J)=\beta(\nu,J)-\beta(\nu-2,J). \tag{6.28}$$

用这种方法，可以很方便的求出所需的全部 $sp(N)\supset so(3)$ 约化的重复度. 附录 I 给出 $j\le 15/2$ 的重复度.

6.2.3 CFP系数的因子化

表 6.3 产生和湮没算符作为不可约张量的秩

	$su(N)$	$sp(N)$	$so(3)$
$a_m^\dagger$	$[1]$	(1)	j
$\tilde{a}_m$	$[1^{N-1}]$	(1)	j

当波函数按李代数链 $u(N)\supset sp(N)\supset so(3)$ 分类时，通过直接做 $a_m^\dagger, a_m$ 与表 6.2 给出的各李代数生成元间对易关系，可以证

明产生和湮没算符是各李代数的不可约张量，其秩由表 6.3 给出. 除表 6.3 之外，$a_m^\dagger$ 和 $-\tilde{a}_m$ 还构成 $su(2)_q$ 的 1/2 秩不可约张量，分别对应于 $1/2, -1/2$ 和 $1/2, 1/2$ 分量. 产生和湮没算符的不可约张量性质，对 CFP 系数的因子化，具有重要作用.

由产生算符是 $u(N)$ 的不可约张量性质，利用 $u(N)$ 的 Wigner-Eckart 定理和半单紧致李代数的完全可约性，可得

$$\begin{aligned}
&\langle n\,\nu\,\alpha\,J\,M|a_m^\dagger|n-1\,\nu_1\,\alpha_1\,J_1\,M_1\rangle \\
&= \left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ (1) & (1^{\nu_1}) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ (1^\nu) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} (1) & (1^{\nu_1}) \\ j & \alpha_1\,J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1^\nu) \\ \alpha\,J \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \langle j\,m\,J_1\,M_1|J\,M\rangle\langle n\|a^\dagger\|n-1\rangle_{u(N)},
\end{aligned} \tag{6.29}$$

其中 $\left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ (1) & (1^{\nu_1}) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ (1^\nu) \end{matrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{matrix} (1) & (1^{\nu_1}) \\ j & \alpha_1\,J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1^\nu) \\ \alpha\,J \end{matrix} \right\rangle$ 分别为 $u(N) \supset sp(N)$, $sp(N) \supset so(3)$ 的约化系数，$\langle j\,m\,J_1\,M_1|J\,M\rangle$ 为 $so(3)$ 的 CG 系数，$\langle n\|a^\dagger\|n-1\rangle_{u(N)}$ 为产生算符的 $u(N)$ 约化矩阵元.

利用约化矩阵元与分量指标无关，用 n 个粒子的角动量投影量子数来标记 $u(N)$ 的不可约表示 $[1^n]$ 空间的态. 已知 $[1^n]$ 的最高权态为

$$\left| \begin{matrix} [1^n] \\ \text{h.w.} \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} [1^n] \\ j\;j-1\;\cdots\;j-n+1 \end{matrix} \right\rangle = a_j^\dagger a_{j-1}^\dagger \cdots a_{j-n+1}^\dagger |0\rangle.$$

记量子数 $j, j-1, \cdots, j-n+1$ 中少一个投影量子数 m 的态为 $\overline{m}$, 则有

$$\left\langle \begin{matrix} [1^n] \\ \text{h.w.} \end{matrix} \middle| a_m^\dagger \middle| \begin{matrix} [1^{n-1}] \\ m_1\,m_2\,\cdots\,m_{n-1} \end{matrix} \right\rangle$$

$$
= \begin{cases} \left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ m & m_1\, m_2 \cdots m_{n-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ \text{h.w.} \end{matrix} \right\rangle \langle n\|a^\dagger\|n-1\rangle_{u(N)} \\ \quad = (-)^{j-m}, \quad 当 m_1\, m_2 \cdots m_{n-1} = \overline{m}, \\ \qquad\qquad\qquad m = j, j-1, \cdots, j-n+1, \\ 0, \quad 其他情况. \end{cases}
$$

利用约化系数的正交归一性,

$$
\sum_{m=j-n+1}^{j} \left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ m & \overline{m} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ \text{h.w.} \end{matrix} \right\rangle^2 = 1.
$$

取相因子使约化矩阵元为正，得

$$
\langle n\|a^\dagger\|n-1\rangle_{u(N)} = \sqrt{n}. \tag{6.30}
$$

同样由产生算符是 $so(3)$ 和 $sp(N)$ 的不可约张量性质，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle n\, \nu\, \alpha\, J\, M|a_m^\dagger|n-1\, \nu_1\, \alpha_1\, J_1\, M_1\rangle \\
&= \langle j\, m\, J_1\, M_1|J\, M\rangle \langle n\, \nu\, \alpha\, J\|a^\dagger\|n-1\, \nu_1\, \alpha_1\, J_1\rangle_{so(3)} \\
&= \left\langle \begin{matrix} (1) & (1^{\nu_1}) \\ j & \alpha_1\, J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1^\nu) \\ \alpha\, J \end{matrix} \right\rangle \langle j\, m\, J_1\, M_1|J\, M\rangle \langle n\, \nu\|a^\dagger\|n-1\, \nu_1\rangle_{sp(N)},
\end{aligned} \tag{6.31}
$$

式中下标 $so(3)$, $sp(N)$ 说明是 $a^\dagger$ 的 $so(3)$, 或 $sp(N)$ 的约化矩阵元. 用 (6.29),(6.30),(6.31) 和已知粒子数表象中的 CFP 系数，有

$$
\begin{aligned}
&\langle n\, \nu\, \alpha\, J\|a^\dagger\|n-1\, \nu_1\, \alpha_1\, J_1\rangle_{so(3)} \\
&= \sqrt{n} \langle n\, \nu\, \alpha\, J \| n-1\, \nu_1\, \alpha_1\, J_1\rangle \\
&= \sqrt{n} \left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ (1) & (1^{\nu_1}) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ (1^\nu) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} (1) & (1^{\nu_1}) \\ j & \alpha_1\, J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1^\nu) \\ \alpha\, J \end{matrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{matrix} (1) & (1^{\nu_1}) \\ j & \alpha_1\, J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1^\nu) \\ \alpha\, J \end{matrix} \right\rangle \langle n\, \nu\|a^\dagger\|n-1\, \nu_1\rangle_{sp(N)}.
\end{aligned} \tag{6.32}
$$

所以若求出 $u(N)\supset sp(N)$ 和 $sp(N)\supset so(3)$ 的约化系数，便求得了 CFP 系数.

先证明 $sp(N)\supset so(3)$ 约化系数的倒易律. 从产生和湮没算符的关系以及它们均为 $sp(N)$ 的 (1) 秩不可约张量，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle \nu\ \nu\ \alpha\ J\|\tilde{a}\|\nu+1\ \nu+1\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)} \\
&=(-)^{j+J_1-J}\sqrt{\frac{2J_1+1}{2J+1}}\langle \nu+1\ \nu+1\ \alpha_1\ J_1\|a^\dagger\|\nu\ \nu\ \alpha\ J\rangle_{so(3)} \\
&=\left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & (1^{\nu+1}) & (1^\nu) \\ j & \alpha_1\ J_1 & \alpha\ J \end{array}\right\rangle \langle \nu\ \nu\|\tilde{a}\|\nu+1\ \nu+1\rangle_{sp(N)} \\
&=(-)^{j+J_1-J}\sqrt{\frac{2J_1+1}{2J+1}}\left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & (1^{\nu}) & (1^{\nu+1}) \\ j & \alpha\ J & \alpha_1\ J_1 \end{array}\right\rangle \\
&\quad\times\langle \nu+1\ \nu+1\|a^\dagger\|\nu\ \nu\rangle_{sp(N)}.
\end{aligned}
$$

两边取绝对值平方，并对 α, J, α_1, J_1 求和，适当选择相因子，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle \nu\ \nu\|\tilde{a}\|\nu+1\ \nu+1\rangle_{sp(N)} \\
&\quad=\sqrt{\frac{\dim(1^{\nu+1})}{\dim(1^\nu)}}\langle \nu+1\ \nu+1\|a^\dagger\|\nu\ \nu\rangle_{sp(N)} \\
&\quad=\sqrt{\frac{(N-2\nu)(N+2-\nu)}{(\nu+1)(N+2-2\nu)}}\langle \nu+1\ \nu+1\|a^\dagger\|\nu\ \nu\rangle_{sp(N)}.
\end{aligned}
$$

这样就求出了 $sp(N)\supset so(3)$ 约化系数的倒易律，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & (1^{\nu+1}) & (1^\nu) \\ j & \alpha_1\ J_1 & \alpha\ J \end{array}\right\rangle \\
&\quad=(-)^{j+J_1-J}\sqrt{\frac{\dim(J_1)\dim(1^\nu)}{\dim(J)\dim(1^{\nu+1})}}\left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & (1^{\nu}) & (1^{\nu+1}) \\ j & \alpha\ J & \alpha_1\ J_1 \end{array}\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$= (-)^{j+J_1-J}\sqrt{\frac{(2J_1+1)(\nu+1)(N+2-2\nu)}{(2J+1)(N-2\nu)(N+2-\nu)}}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} (1) & (1^\nu) \\ j & \alpha\, J \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1^{\nu+1}) \\ \alpha_1\, J_1 \end{matrix} \right\rangle, \tag{6.33}$$

其中 $\dim(J)$ 和 $\dim(1^\nu)$ 等分别为 $so(3)$ 表示 J 和 $sp(N)$ 表示 (1^ν) 的维数.

现在求 $su(N) \supset sp(N)$ 的约化系数. 取成对粒子数为 $\rho = (n-\nu)/2$, 则

$$|n\,\nu\,\alpha\,J\,M\rangle = c(n,\nu)P^{\dagger\rho}|\nu\,\nu\,\alpha\,J\,M\rangle, \tag{6.34}$$

其中 $|\nu\,\nu\,\alpha\,J\,M\rangle$ 是 ν 个全不成对的粒子构成的态, 满足 $\tilde{P}|\nu\,\nu\,\alpha\,J\,M\rangle = 0$, $c(n,\nu)$ 是归一化常数. 由 $P = -\tilde{P}$,

$$[P, P^{\dagger\rho}] = \rho P^{\dagger\rho-1}(N+2-2\rho-2\hat{n}_f),$$

可得

$$c(n,\nu) = \sqrt{\frac{(N-n-\nu)!!}{((n-\nu)/2)!(N-2\nu)!!}}. \tag{6.35}$$

注意 $[P^\rho, a_m^\dagger] = -\sqrt{2}\rho P^{\rho-1}\tilde{a}_m$, 可以算出

$$\langle n\,\nu\,\alpha\,J\,M|a_m^\dagger|n-1\;\nu-1\;\alpha_1\;J_1\;M_1\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{N-n-\nu+2}{N-2\nu+2}}\langle \nu\,\nu\,\alpha\,J\,M|a_m^\dagger|\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1\;J_1\;M_1\rangle,$$

$$\langle n\,\nu\,\alpha\,J\,M|a_m^\dagger|n-1\;\nu+1\;\alpha_1\;J_1\;M_1\rangle$$

$$= -\sqrt{\frac{n-\nu}{N-2\nu}}\langle \nu\,\nu\,\alpha\,J\,M|\tilde{a}_m|\nu+1\;\nu+1\;\alpha_1\;J_1\;M_1\rangle.$$

用 $\left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{\nu-1}] \\ (1) & (1^{\nu-1}) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^\nu] \\ (1^\nu) \end{matrix} \right\rangle = 1$, 和 $sp(N) \supset so(3)$ 约化系数倒易律 (见 (6.37)), 可得 $su(N) \supset sp(N)$ 约化系数

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ (1) & (1^{\nu-1}) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ (1^\nu) \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{\nu(N-n-\nu+2)}{n(N-2\nu+2)}}, \\ &\left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ (1) & (1^{\nu+1}) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ (1^\nu) \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{(n-\nu)(N-\nu+2)}{n(N-2\nu+2)}}. \end{aligned} \tag{6.36a}$$

用 $su(2)_q$ 的不可约表示及 CG 系数计算 $su(n) \supset sp(N)$ 约化系数更为简单. 用 $Q(Q+1), M_q$ 表示 Q^2, Q_0 对应的量子数, 其中 $Q^2 = -Q_{+1}Q_{-1} - Q_{-1}Q_{+1} + Q_0^2$, 则波函数可写为 $|Q\ M_q\ \alpha\ J\ M\rangle = |n\ \nu\ \alpha\ J\ M\rangle$, 且有

$$\begin{aligned} &\langle n\ \nu\ \alpha\ J\ M|a_m^\dagger|n-1\ \nu_1\ \alpha_1\ J_1\ M_1\rangle \\ &\quad = \langle Q\ M_q\ \alpha\ J\ M|a_m^\dagger|Q_1\ M_{q_1}\ \alpha_1\ J_1\ M_1\rangle, \end{aligned}$$

其中 $M_q = N/4 - n/2$, $Q = N/4 - \nu/2$, $M_{q_1} = N/4 - (n-1)/2$, $Q_1 = N/4 - \nu_1/2$. 并且有

$$\begin{aligned} &\langle n\ \nu\ \alpha\ J\|a^\dagger\|n-1\ \nu_1\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)} \\ &\quad = \langle 1/2\ \ -1/2\ Q_1\ M_{q_1}|Q\ M_q\rangle\langle Q\ \alpha\ J\|a^\dagger\|Q_1\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)\otimes su(2)_q}, \end{aligned} \tag{6.37a}$$

由 $a_m^\dagger$ 和 $-\tilde{a}_m$ 分别是 $su(2)_q$ 的 1/2 秩不可约张量的 $-1/2$ 和 1/2 分量, 可得

$$\begin{aligned} &\langle \nu\ \nu\ \alpha\ J\|a^\dagger\|\nu-1\ \nu-1\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)} \\ &= \langle Q\ Q\ \alpha\ J\|a^\dagger\|Q+1/2\ Q+1/2\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)} \\ &= \sqrt{\nu}\left\langle \begin{matrix} (1) & (1^{\nu-1}) \\ j & \alpha_1\ J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1^\nu) \\ \alpha\ J \end{matrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle 1/2\ \ -1/2\ \ Q+1/2\ \ Q+1/2|Q\,Q\rangle$$
$$\times\langle Q\ \alpha\ J\|a^\dagger\|Q+1/2\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)\otimes su(2)_q}. \tag{6.37b}$$

再利用 $sp(N)\supset so(3)$ 约化系数的倒易律，可得

$$\begin{aligned}
&\langle \nu\ \nu\ \alpha\ J\| -\tilde{a}\|\nu+1\ \nu+1\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)}\\
&= (-)^{j+J_1-J+1}\sqrt{\frac{(\nu+1)(2J_1+1)}{2J+1}}\left\langle \begin{matrix}(1) & (1^\nu)\\ j & \alpha\,J\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix}(1^{\nu+1})\\ \alpha_1\,J_1\end{matrix}\right\rangle\\
&= \langle Q\ Q\ \alpha\ J\| -\tilde{a}\|Q-1/2\ \ Q-1/2\ \ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)}\\
&= -\sqrt{\frac{(N-2\nu)(N+2-\nu)}{N+2-2\nu}}\left\langle \begin{matrix}(1) & (1^{\nu+1})\\ j & \alpha_1\,J_1\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix}(1^{\nu})\\ \alpha\,J\end{matrix}\right\rangle\\
&= \langle Q\ \alpha\ J\|a^\dagger\|Q-1/2\ \ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)\otimes su(2)_q}.
\end{aligned} \tag{6.37c}$$

由 (6.37) 可以求出与 (6.36a) 一致的结果，

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix}[1] & [1^{n-1}]\\ (1) & (1^{\nu-1})\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix}[1^n]\\ (1^\nu)\end{matrix}\right\rangle = \sqrt{\frac{\nu(N-n-\nu+2)}{n(N-2\nu+2)}}\\
&= \sqrt{\frac{\nu}{n}}\frac{\langle 1/2\ \ -1/2\ \ Q+1/2\ \ M_q+1/2|Q\ M_q\rangle}{\langle 1/2\ \ -1/2\ \ Q+1/2\ \ Q+1/2|Q\ Q\rangle},\\
&\left\langle \begin{matrix}[1] & [1^{n-1}]\\ (1) & (1^{\nu+1})\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix}[1^n]\\ (1^\nu)\end{matrix}\right\rangle = -\sqrt{\frac{(n-\nu)(N-\nu+2)}{n(N-2\nu+2)}}\\
&= -\sqrt{\frac{(N-2\nu)(N+2-\nu)}{n(N+2-2\nu)}}\langle Q-1/2\ \ M_q+1/2\ \ 1/2\ \ -1/2|Q\ M_q\rangle.
\end{aligned} \tag{6.36b}$$

6.2.4 $sp(N)\supset so(3)$ 约化系数的递推公式

$sp(N)\supset so(3)$ 约化系数尚无解析公式，只能用递推公式求出．由倒易律 (6.33) 知，只需求出下约化矩阵元即可得全部

$sp(N)\supset so(3)$ 约化系数,

$$\langle\nu\ \nu\ \alpha\ J\|a^\dagger\|\nu-1\ \nu-1\ \alpha_1\ J_1\rangle_{so(3)}=\sqrt{\nu}\left\langle\begin{array}{cc|c}(1) & (1^{\nu-1}) & (1^\nu)\\ j & \alpha_1\ J_1 & \alpha\ J\end{array}\right\rangle. \tag{6.38}$$

设辛弱数小于 ν 的态已知，则由角动量耦合从辛弱数为 $\nu-1$ 的态，可以得到 ν 个粒子具有角动量 J, 投影 M 的态,

$$\begin{aligned}|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ M)\rangle&=[a^\dagger|\nu-1\ \nu-1\ \alpha_1'\ J_1'\rangle]^J_M\\ &=\sum_{m\ M_1}\langle j\ m\ J_1'\ M_1|J\ M\rangle a^\dagger_m|\nu-1\ \nu-1\ \alpha_1'\ J_1'\ M_1\rangle.\end{aligned} \tag{6.39}$$

$|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ M)\rangle$ 中附加量子数用 $[\alpha_1'\ J_1']$ 标记，也就是用 Ψ 的母态来标记. Ψ 态包含辛弱数为 ν 和 $\nu-2$ 的态. 辛弱数为 $\nu-2$ 的态可以用已知的态 $|\nu\ \nu-2\ \alpha_2\ J\ M\rangle$ 来展开，于是

$$\begin{aligned}|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ M)\rangle&=A(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J)|\nu\ \nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ M\rangle\\ &\quad+\sum_{\alpha_2}B(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ \alpha_2)|\nu\ \nu-2\ \alpha_2\ J\ M\rangle.\end{aligned}$$

ν 个全不成对的粒子态为

$$\begin{aligned}|\nu\ \nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ M\rangle&=\frac{1}{A(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J)}\Big\{|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ M)\rangle\\ &\quad-\sum_{\alpha_2}B(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ \alpha_2)|\nu\ \nu-2\ \alpha_2\ J\ M\rangle\Big\}.\end{aligned} \tag{6.40}$$

由于已知态 $|\nu\ \nu-2\ \alpha_2\ J\ M\rangle$ 是正交归一的，不同辛弱数的态是正交的，所以

$$\begin{aligned}B(\nu\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ \alpha_2)&=\langle\nu\ \nu-2\ \alpha_2\ J\|a^\dagger\|\nu-1\ \nu-1\ \alpha_1'\ J_1'\rangle_{so(3)}\\ &=(-)^{J_1'-j-J}\sqrt{\frac{2(2J_1'+1)}{(2J+1)(N-2\nu+4)}}\langle\nu-1\ \nu-1\ \alpha_1'\ J_1'\|a^\dagger\|\nu-2\ \nu-2\ \alpha_2\ J\rangle.\end{aligned} \tag{6.41}$$

由 $|\nu\,\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J\;M\rangle$ 的归一化和 (6.41), 可以得到

$$
\begin{aligned}
&A(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J)^2\\
&\quad=\langle\Psi(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J\,M)|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J\,M)\rangle-\sum_{\alpha_2}B(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J\;\alpha_2)^2\\
&\quad=1+(-)^{2J_1'}(2J_1'+1)\sum_{\alpha_2\;J_2}\left[\begin{Bmatrix} j & J_2 & J_1'\\ j & J & J_1'\end{Bmatrix}\right.\\
&\qquad\left.+(-)^{2J_1+1}\frac{2\delta_{J_2\;J}}{(2J+1)(N-2\nu+4)}\right]\\
&\qquad\times\langle\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1'\;J_1'\|a^\dagger\|\nu-2\;\nu-2\;\alpha_2\;J_2\rangle^2.
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

约化矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle\nu\,\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J\|a^\dagger\|\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1\;J_1\rangle=\frac{1}{A(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J)}\left\{\delta_{\alpha_1'\;\alpha_1}\delta_{J_1'\;J_1}\right.\\
&\quad+(-)^{J_1+J_1'}\sqrt{(2J_1'+1)(2J_1+1)}\sum_{\alpha_2\;J_2}\left[\begin{Bmatrix} j & J_2 & J_1'\\ j & J & J_1\end{Bmatrix}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2\delta_{J\;J_2}(-)^\nu}{(2J+1)(N-2\nu+4)}\right]\langle\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1'\;J_1'\|a^\dagger\|\nu-2\;\nu-2\;\alpha_2\;J_2\rangle\\
&\quad\left.\times\langle\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1\;J_1\|a^\dagger\|\nu-2\;\nu-2\;\alpha_2\;J_2\rangle\right\}.
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

这就是显含辛弱数的 CFP 递推公式. 取 $A(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J)$ 为正, 其值由 (6.42) 给出. 常取

$$
\begin{aligned}
&P(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;\alpha_1\;J_1\;J)=\delta_{\alpha_1'\;\alpha_1}\delta_{J_1'\;J_1}\\
&\quad+(-)^{J_1+J_1'}\sqrt{(2J_1'+1)(2J_1+1)}\sum_{\alpha_2\;J_2}\left[\begin{Bmatrix} j & J_2 & J_1'\\ j & J & J_1\end{Bmatrix}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2\delta_{J\;J_2}(-)^\nu}{(2J+1)(N-2\nu+4)}\right]\langle\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1'\;J_1'\|a^\dagger\|\nu-2\;\nu-2\;\alpha_2\;J_2\rangle\\
&\quad\times\langle\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1\;J_1\|a^\dagger\|\nu-2\;\nu-2\;\alpha_2\;J_2\rangle,
\end{aligned}
\tag{6.44a}
$$

将递推公式写成

$$A(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J)=\sqrt{P(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;\alpha_1'\;J_1'\;J)},\tag{6.44b}$$

$$\langle\nu\;\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J\|a^{\dagger}\|\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1\;J_1\rangle=\frac{P(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;\alpha_1\;J_1\;J)}{\sqrt{P(\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;\alpha_1'\;J_1'\;J)}}.\tag{6.44c}$$

用递推关系 (6.44) 得到的态 $|\nu\;\nu\,[\alpha_1'\;J_1']\;J\rangle$, 虽满足归一化条件, 但是是非正交的和超完备的. 任取一组 $[\alpha_1'\;J_1']$, 都会给出一个态, 所以还必需从中选出一组正交归一完备态. 也就是说, 每从 $\nu-1$ 到 ν 递推一步, 必需进行选取正交归一完备态的手续之后, 才能进行下一步从 ν 到 $\nu+1$ 的递推. 所以说, 显含辛弱数的递推关系并不能避开超完备空间引起的舍入误差问题. 当然由于因子化使计算的态空间显著减小, 是有优越性的.

用本节算法计算单角动量费密子的 CFP 系数, 即代入 $u(N)\supset sp(N)$ 约化系数的解析表达式, 用计算出的 $sp(N)\supset so(3)$ 重复度控制递推关系 (6.44) 的递推过程, 可以有效地减小舍入误差的影响. 按此写出的程序 [29], 比原有程序计算效率提高约一个数量级.

6.3 单角动量玻色子的波函数

本节考虑具有确定角动量的全同玻色子体系, 下面将逐步讨论李代数链分类波函数, 李代数链的约化, CFP 系数因子化和显含辛弱数的递推公式等问题.

6.3.1 李代数链分类波函数

设单个玻色子具有确定的角动量 l, 其投影 m 可取 $l,l-1,\cdots,-l$, l 为非负整数. 玻色子的产生算符和湮没算符写为 $b^{\dagger}_{l\,m}=b^{\dagger}_{m}$,

$b_{l\,m}=b_m$. 它们满足以下对易关系

$$
\begin{aligned}
&[b_m^\dagger, b_{m'}^\dagger]=[b_m, b_{m'}]=0,\\
&[b_m, b_{m'}^\dagger]=\delta_{m\,m'}.
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

体系的总角动量算符为

$$
\begin{aligned}
L_0&=\sum_m m b_m^\dagger b_m,\\
L_{\pm1}&=\mp\sum_m \sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)/2}\,b_{m\pm1}^\dagger b_m,
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

$L_0, L_{\pm1}$ 是空间转动代数 $so(3)$ 的生成元. 体系转动不变, 就是要在 $so(3)$ 的一个不可约表示空间中变, 即具有确定的总角动量 L.

取 $N=2l+1$, 具有确定角动量 l 的全同玻色子体系的巨希耳伯特空间有对称群, 其李代数的生成元为

$$
\begin{aligned}
&b_m^\dagger b_m+1/2, \quad m=l,l-1,\cdots,-l,\\
&b_m^\dagger b_{m'}^\dagger, \quad m,m'=l,l-1,\cdots,-l,\\
&b_m b_{m'}, \quad m,m'=l,l-1,\cdots,-l,\\
&b_m^\dagger b_{m'}, \quad m,m'=l,l-1,\cdots,-l, \quad m\neq m'.
\end{aligned}
\tag{6.47}
$$

它们构成李代数 $sp(2N,R)$. 其 Cartan 子代数的基为 $H_m=b_m^\dagger b_m+1/2$, $m=l,l-1,\cdots,-l$. $sp(2N,R)$ 是非紧致实李代数, 所以它的厄米表示只可能是无限维的. 它的有下界的不可约厄米表示可用最低权标记, 不可约表示 $(1/2,1/2,\cdots,1/2)=(1/2^N)$ 的最低权态没有粒子, 不可约表示 $(1/2,1/2,\cdots,1/2,3/2)=((1/2)^{N-1},3/2)$ 的最低权态有一个投影为 $-l$ 的粒子. 由于生成元不包含单个粒子的产生和湮没算符, 所以有偶数个粒子的态与有奇数个粒子的态, 在 $sp(2N,R)$ 的作用下, 不会相互转化. 不可约表示 $((1/2)^N)$ 给出有偶数个粒子的巨希耳伯特空间, 不可约表示 $((1/2)^{N-1},3/2)$ 给出

有奇数个粒子的巨希耳伯特空间. 无限维表示正好反映玻色子数目可以无限增加的特点.

保持粒子数守恒的最大李代数为 $u(N)$. $u(N)$ 的 Cartan 子代数基为 $H_m = b_m^\dagger b_m$, 其他生成元为 $b_m^\dagger b_{m'}$, 其中 $m, m' = l, l-1, \cdots, -l$, $m \neq m'$. 具有 n 个粒子的空间构成 $u(N)$ 的一个不可约表示空间, 用最高权 $[n, 0^{N-1}] = [n]$ 标记此不可约表示.

为了以后写转动不变的形式方便, 常将 $u(N)$ 的生成元写成 $so(3)$ 的不可约张量形式. 由 $b_m^\dagger$ 与 $so(3)$ 生成元的对易关系可以看出, $b_m^\dagger$ 是 $so(3)$ 的 l 秩不可约张量, 而 b_m 却不是 $so(3)$ 的不可约张量. 可以证明 $\tilde{b}_m = (-)^{l+m} b_{-m}$ 是 $so(3)$ 的 l 秩不可约张量, 所以在写不可约张量形式时, 总用 $\tilde{b}_m$ 代替 b_{-m}. $u(N)$ 生成元的不可约张量形式为

$$\begin{aligned} &(b^\dagger \tilde{b})_q^k = \sum_{m\ m'} \langle l\ m\ l\ m' | k\ q \rangle b_m^\dagger \tilde{b}_{m'}, \\ &k = 0, 1, \cdots, 2l, \qquad q = k, k-1, \cdots, -k. \end{aligned} \tag{6.48}$$

注意 l 为整数, 它们满足以下对易关系

$$\begin{aligned} &[(b^\dagger \tilde{b})_q^k, (b^\dagger \tilde{b})_{q'}^{k'}] = \sqrt{(2k+1)(2k'+1)} \\ &\times \sum_{k''} \langle k\ q\ k'\ q' | k''\ q'' \rangle \left\{ \begin{matrix} k & k' & k'' \\ l & l & l \end{matrix} \right\} ((-)^{k''} - (-)^{k+k'}) (b^\dagger \tilde{b})_{q''}^{k''}. \end{aligned} \tag{6.49}$$

总玻色子数算符为

$$\hat{n}_b = \sum_{m=-l}^{l} b_m^\dagger b_m = \sqrt{N} (b^\dagger \tilde{b})_0^0.$$

由 $\hat{n}_b$ 生成李代数 $u(1)_n$. $u(N) = u(1)_n \oplus su(N)$, $su(N)$ 是 $sp(2N, R)$ 保持粒子数守恒的子代数. 在等价原则下, $su(N)$ 的不可约表示也用 $[n]$ 标记.

由对易关系 (6.49) 可以看出，当 $k=1,3,\cdots,2l-1$ 等奇数时，$(b^\dagger\tilde{b})^k_q$ 构成 $su(N)$ 的子代数，用

$$(b^\dagger\tilde{b})^k_q=\sum_{m\,m'}\langle l\;m\;l\;m'|k\;q\rangle(b^\dagger_m\tilde{b}_{m'}-b^\dagger_{m'}\tilde{b}_m).$$

可以得到其生成元的非耦合形式为

$$\Xi_{m\,m'}=b^\dagger_m\tilde{b}_{m'}-b^\dagger_{m'}\tilde{b}_m.$$

由此可看出此为李代数 $so(N)$. 其 Cartan 子代数的基可以取为 $H_m=b^\dagger_m b_m-b^\dagger_{-m}b_{-m}$, $m=l,l-1,\cdots,1$. H_m 是投影为 m 的粒子数减去投影为 $-m$ 的粒子数. $so(N)$ 的不可约表示最高权 $(\sigma,0^{l-1})=(\sigma)$ 对应有 σ 个不成对粒子的态. 量子数 σ 称为辛弱数.

取 $P^\dagger,\tilde{P}$ 分别为对产生和对湮没算符

$$P^\dagger=\sqrt{\frac{2l+1}{2}}(b^\dagger b^\dagger)^0_0,\quad \tilde{P}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}}(\tilde{b}\tilde{b})^0_0=P, \tag{6.50a}$$

$sp(2N,R)$ 还有子代数 $su(2)_q$, 其生成元为 $Q_0,Q_{\pm1}$.

$$\begin{aligned}Q_0&=\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\hat{n}_b,\\ Q_{+1}&=\frac{1}{2}P^\dagger,\\ Q_{-1}&=\frac{1}{2}\tilde{P},\end{aligned}\tag{6.50b}$$

满足 $su(2)$ 对易关系

$$\begin{aligned}[][Q_0,Q_{\pm1}]&=\pm Q_{\pm1},\\ [Q_{+1},Q_{-1}]&=-Q_0.\end{aligned}$$

$su(2)_q$ 是准自旋 (quasispin) 代数，显然 $so(N)$ 的生成元与 $su(2)_q$ 的生成元是对易的，所以 $so(N)$ 是 $su(2)_q$ 不变的.

描述转动不变的单角动量玻色子体系的李代数链，可以归纳为以下两条：

$$sp(2N, R) \supset su(N) \supset so(N) \supset so(3), \tag{6.51}$$

$$sp(2N, R) \supset so(N) \oplus su(2)_q \supset so(3) \oplus su(2)_q. \tag{6.52}$$

对于粒子数确定的态，常用 $u(N) \supset so(N) \supset so(3)$ 链来分类波函数. 表 6.4 给出此链中每个李代数的生成元，不变量和不可约表示标记，其中除 $u(N)$ 的不变量 $\hat{n}_b$ 之外，其余均为 Casimir 算子. 波函数可以写为 $|n\ \sigma\ \alpha\ L\ M\rangle$, 其中 M 是 L 的投影量子数， α 是附加量子数，此处是反映 $so(N) \supset so(3)$ 的非简单约化的. 从表 6.4 可以看出，用 $so(N) \oplus su(2)_q \supset so(3) \oplus su(2)_q$ 来分类波函数是一样的，因为 Q 可由 ν, M_q 可由 n 决定.

表 6.4

李代数	生成元	不变量	表示
$u(N)$	$E_{m\ m'} = b_m^\dagger b_{m'}$ $(b^\dagger \tilde{b})_q^k$	$\hat{n}_b$ $\frac{1}{2N}\hat{n}_b(N-1+\hat{n}_b)$	$[n]$
$s\varrho(N)$	$\Xi_{m\ m'} = b_m^\dagger \tilde{b}_{m'} - b_{m'}^\dagger \tilde{b}_m$ $(b^\dagger \tilde{b})_q^k\ \ k=$ 奇	$\frac{1}{2}\hat{n}_b(N-2+\hat{n}_b)-P^\dagger \tilde{P}=$ $\sum_{k=\text{奇},q}(-)^{q+1}(b^\dagger \tilde{b})_q^k(b^\dagger \tilde{b})_{-q}^k$	(σ)
$sO(3)$	$L_q=\sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{3}}(b^\dagger \tilde{b})_q^1$	$L^2=-L_{+1}L_{-1}-L_{-1}L_{+1}+L_0^2$	L
$su(2)_q$	$Q_0 = \frac{N}{4} + \frac{1}{2}\hat{n}_b,$ $Q_{+1}=\frac{1}{2}P^\dagger,\ \ Q_{-1}=\frac{1}{2}\tilde{P}$	$Q_0(Q_0-1)-\frac{P^\dagger \tilde{P}}{2}=$ $\frac{\hat{n}_b(N-2+\hat{n}_b)}{4}-\frac{P^\dagger \tilde{P}}{2}+\frac{N(N-4)}{16}$	Q

6.3.2 李代数链的约化

对 $u(N)$ 的不可约表示 $[n]$, 按李代数链 $u(N) \supset so(N)$ 约化，

即 $[n]=\oplus_\sigma(\sigma)$, 有

$$\begin{aligned}&\sigma=n,n-2,\cdots,0, \quad n=\text{偶},\\&\sigma=n,n-2,\cdots,1, \quad n=\text{奇}.\end{aligned} \tag{6.53}$$

只要再求出 $so(N)\supset so(3)$ 的约化，则求出了波函数所需的全部约化规则. 此处仍采用先求 $u(N)\supset so(3)$ 的约化规则，再利用已知的 $u(N)\supset so(N)$ 约化规则, 求出 $so(N)\supset so(3)$ 的约化规则.

$u(N)$ 的 Cartan 子代数的基为 $b_l^\dagger b_l, b_{l-1}^\dagger b_{l-1},\cdots,b_{-l}^\dagger b_{-l}$. 在其不可约表示 $[n]$ 空间, n 个玻色子可以在不同投影量子数 $l,l-1,\cdots,-l$ 的态上任意填充. 即它们的投影量子数可以相同, 也可以不同. 一种填充方式给出一次一定的角动量投影 M, 有的 M 会出现多次. 不失一般性可规定 $m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_n$. $[n]$ 对应的 M 最大值为 $\hat{M}=nl$, 此时对应唯一的填充方式为 $m_1=m_2=\cdots=m_n=l$. 所以 $[n]$ 包含的最大角动量即为 $\hat{M}$. 而角动量 L 有投影 $M=L,L-1,\cdots,-L$, 从所有的 M 量子数中减去 $\hat{M},\hat{M}-1,\cdots,-\hat{M}$, 剩余的最大的 M 量子数又对应次大的角动量. 如此类推, 与费密子类似, 可以逐步求出所有可能的角动量.

以 $P(\xi)$ 表投影为 $M=\hat{M}-\xi$ 时, 可能有的填充方式的数目. 如果 $P(\xi)$, $P(\xi-1)$ 已知, 则 $u(N)$ 的 $[n]$ 表示包含 $L=\hat{M}-\xi$ 的重复度 $\beta(n,L)=P(\xi)-P(\xi-1)$. 每一种填充方式对应的各个粒子投影为 $l-\xi_1\geq l-\xi_2\geq\cdots\geq l-\xi_n$, 所以

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n, \tag{6.54a}$$

并且

$$\xi_n\geq\xi_{n-1}\geq\cdots\geq\xi_2\geq\xi_1\geq 0. \tag{6.54b}$$

最小的单个粒子投影量子数为 $-l$, 所以还需满足

$$\xi_n\leq 2l. \tag{6.54c}$$

由 6.2 节知 ξ 的行不大于 a, 列不大于 b 划分数 $P_{a\,b}(\xi)$, 可以用 (6.26) 和 (6.27) 递推求出.

所以玻色子投影为 $M = \hat{M} - \xi$ 的填充方式 $P(\xi) = P_{n\,2l}(\xi)$, 所以在 $u(N)$ 的 $[n]$ 不可约表示中, $L = \hat{M} - \xi$ 的重复度为

$$\beta(n, L) = P_{n\,2l}(\xi) - P_{n\,2l}(\xi - 1). \tag{6.55}$$

再利用已知的 $u(N) \supset so(N)$ 约化规则, 可得在 $so(N)$ 的 (σ) 不可约表示中, $L = \hat{M} - \xi$ 的重复度 $\gamma(\sigma, L)$ 为

$$\gamma(\sigma, L) = \beta(\sigma, L) - \beta(\sigma - 2, L). \tag{6.56}$$

用这种方法, 可以很方便的求出所需的全部 $so(N) \supset so(3)$ 约化的重复度. 文献 [27], [28] 给出 $l = 2, 3, 4$ 时部分重复度.

6.3.3 CFP系数的因子化

当波函数按李代数链 $su(N) \supset so(N) \supset so(3)$ 分类时, 通过直接做 $b_m^\dagger, b_m$ 与表 6.4 给出的各李代数生成元间对易关系, 可以证明产生和湮没算符是各李代数的不可约张量, 其秩由表 6.5 给出. 除表 6.5 之外, $b_m^\dagger$ 还是 $u(N)$ 的 [1] 秩不可约张量. $b_m^\dagger$ 和 $-\tilde{b}_m$ 还构成 $su(2)_q$ 的 1/2 秩不可约张量, 分别对应于 1/2, 1/2 和 1/2, −1/2 分量. 产生和湮没算符的不可约张量性质, 对 CFP 系数的因子化, 具有重要作用.

表 6.5 产生和湮没算符作为不可约张量的秩

	$su(N)$	$so(N)$	$so(3)$
$b_m^\dagger$	$[1]$	(1)	j
$\tilde{b}_m$	$[1^{N-1}]$	(1)	j

由产生算符是 $su(N)$ 的不可约张量性质, 利用 $su(N)$ 代数的

Wigner-Eckart 定理和半单紧致李代数的完全可约性，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle n\,\sigma\,\alpha\,L\,M|b_m^\dagger|n-1\,\sigma_1\,\alpha_1\,L_1\,M_1\rangle\\
&=\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [n-1] & [n]\\ (1) & (\sigma_1) & (\sigma)\end{array}\right\rangle\left\langle\begin{array}{cc|c}(1) & (\sigma_1) & (\sigma)\\ l & \alpha_1\,L_1 & \alpha\,L\end{array}\right\rangle \qquad (6.57)\\
&\quad\times\langle l\,m\,L_1\,M_1|L\,M\rangle\langle n\|b^\dagger\|n-1\rangle_{su(N)},
\end{aligned}
$$

其中系数 $\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [n-1] & [n]\\ (1) & (\sigma_1) & (\sigma)\end{array}\right\rangle$ 和 $\left\langle\begin{array}{cc|c}(1) & (\sigma_1) & (\sigma)\\ l & \alpha_1\,L_1 & \alpha\,L\end{array}\right\rangle$ 分别为 $su(N)\supset so(N)$ 和 $so(N)\supset so(3)$ 的约化系数，$\langle l\,m\,L_1\,M_1|L\,M\rangle$ 为 $so(3)$ 的 CG 系数， $\langle n\|b^\dagger\|n-1\rangle_{su(N)}$ 为产生算符的 $su(N)$ 约化矩阵元.

已知约化矩阵元与分量指标无关，可用 n 个粒子的角动量投影量子数来标记 $u(N)$ 的不可约表示 $[n]$. $[n]$ 的最高权态为

$$
\left|\begin{array}{c}[n]\\ \text{h.w.}\end{array}\right\rangle=\left|\begin{array}{c}[n]\\ l\,l\,\cdots\,l\end{array}\right\rangle=\left|\begin{array}{c}[n]\\ l^n\end{array}\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{n!}}b_l^{\dagger\,n}|0\rangle.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\begin{array}{c}[n]\\ \text{h.w.}\end{array}\right|b_l^\dagger\left|\begin{array}{c}[n-1]\\ l\,l\,\cdots\,l\end{array}\right\rangle\\
&\quad=\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [n-1] & [n]\\ l & l\,l\,\cdots\,l & \text{h.w.}\end{array}\right\rangle\langle n\|b^\dagger\|n-1\rangle_{su(N)}, \qquad (6.58)\\
&\langle n\|b^\dagger\|n-1\rangle_{su(N)}=\sqrt{n},
\end{aligned}
$$

其中用到 $[1]\otimes[n-1]$ 到 $[n]$ 的最高权态只有一种可能的耦合方式.

同样由产生算符是 $so(3)$ 和 $so(N)$ 的不可约张量性质，可得

$$
\begin{aligned}
&\langle n\,\sigma\,\alpha\,L\,M|b_m^\dagger|n-1\,\sigma_1\,\alpha_1\,L_1\,M_1\rangle\\
&\quad=\langle l\,m\,L_1\,M_1|L\,M\rangle\langle n\,\sigma\,\alpha\,L\|b^\dagger\|n-1\,\sigma_1\,\alpha_1\,L_1\rangle_{so(3)}
\end{aligned}
$$

$$= \left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & (\sigma_1) & (\sigma) \\ l & \alpha_1\, L_1 & \alpha\, L \end{array} \right\rangle \langle l\, m\, L_1\, M_1 | L\, M \rangle \langle n\, \sigma \| b^\dagger \| n-1\, \sigma_1 \rangle_{so(N)}, \tag{6.59}$$

式中下标 $so(3)$, $so(N)$ 说明是 $b^\dagger$ 的 $so(3)$, 或 $so(N)$ 的约化矩阵元. 用 (6.57),(6.58),(6.59), 有

$$\begin{aligned} &\langle n\, \sigma\, \alpha\, L \| b^\dagger \| n-1\, \sigma_1\, \alpha_1\, L_1 \rangle_{so(3)} \\ &= \sqrt{n} \langle n\, \sigma\, \alpha\, L | \} n-1\, \sigma_1\, \alpha_1\, L_1 \rangle \\ &= \sqrt{n} \left\langle \begin{array}{cc|c} [1] & [n-1] & [n] \\ (1) & (\sigma_1) & (\sigma) \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & (\sigma_1) & (\sigma) \\ l & \alpha_1\, L_1 & \alpha\, L \end{array} \right\rangle \\ &\quad \times \langle n\, \sigma \| b^\dagger \| n-1\, \sigma_1 \rangle_{so(N)}. \end{aligned} \tag{6.60}$$

所以若求出 $u(N) \supset so(N)$ 和 $so(N) \supset so(3)$ 的约化系数, 便求得了 CFP 系数.

先证明 $so(N) \supset so(3)$ 约化系数的倒易律. 从产生算符和湮没算符的关系可得

$$\begin{aligned} &\langle \sigma\, \sigma\, \alpha\, L \| \tilde{b} \| \sigma+1\, \sigma+1\, \alpha_1\, L_1 \rangle_{so(3)} \\ &= (-)^{l+L_1-L} \sqrt{\frac{2L_1+1}{2L+1}} \langle \sigma+1\, \sigma+1\, \alpha_1\, L_1 \| b^\dagger \| \sigma\, \sigma\, \alpha\, L \rangle_{so(3)}. \end{aligned} \tag{6.61}$$

又由式 (6.60) 和产生算符和湮没算符均为 $so(N)$ 的 (1) 秩不可约张量, 可得

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & \sigma+1 & \sigma \\ l & \alpha_1\, L_1 & \alpha\, L \end{array} \right\rangle \langle \sigma\, \sigma \| \tilde{b} \| \sigma+1\, \sigma+1 \rangle_{so(N)} \\ &= (-)^{l+L_1-L} \sqrt{\frac{2L_1+1}{2L+1}} \left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & \sigma & \sigma+1 \\ l & \alpha\, L & \alpha_1\, L_1 \end{array} \right\rangle \\ &\quad \times \langle \sigma+1\, \sigma+1 \| b^\dagger \| \sigma\, \sigma \rangle_{so(N)}. \end{aligned}$$

两端取绝对值平方，并对 α, L, α_1, L_1 求和，注意 $so(N) \supset so(3)$ 约化系数的正交归一性，适当选择相因子可使

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma\ \sigma \| \tilde{b} \| \sigma+1\ \sigma+1 \rangle_{so(N)} \\
&= \sqrt{\frac{\dim(\sigma+1)}{\dim(\sigma)}} \langle \sigma+1\ \sigma+1 \| b^\dagger \| \sigma\ \sigma \rangle_{so(N)} \\
&= \sqrt{\frac{(N+2\sigma)(N+\sigma-2)}{(N+2\sigma-2)(\sigma+1)}} \langle \sigma+1\ \sigma+1 \| b^\dagger \| \sigma\ \sigma \rangle_{so(N)},
\end{aligned}$$

其中 $\dim(\sigma)$ 等为 $so(N)$ 不可约表示 (σ) 的维数. 于是得 $so(N) \supset so(3)$ 约化系数的倒易律

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & \sigma+1 & \sigma \\ l & \alpha_1\ L_1 & \alpha\ L \end{array} \right\rangle \\
&= (-)^{l+L_1-L} \sqrt{\frac{\dim(L_1)\dim(\sigma+1)}{\dim(L)\dim(\sigma)}} \left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & \sigma & \sigma+1 \\ l & \alpha\ L & \alpha_1\ L_1 \end{array} \right\rangle \\
&= (-)^{l+L_1-L} \sqrt{\frac{(2L_1+1)(N+2\sigma-2)(\sigma+1)}{(2L+1)(N+2\sigma)(N+\sigma-2)}} \left\langle \begin{array}{cc|c} (1) & \sigma & \sigma+1 \\ l & \alpha L & \alpha_1\ L_1 \end{array} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{6.62}$$

记成对粒子数为 $\rho = (n-\sigma)/2$, 现来求 $u(N) \supset so(N)$ 的约化系数，应该有

$$|n\ \sigma\ \alpha\ L\ M\rangle = c(n,\sigma) P^{\dagger\rho} |\sigma\ \sigma\ \alpha\ L\ M\rangle. \tag{6.63}$$

其中 $|\sigma\ \sigma\ \alpha\ L\ M\rangle$ 是 σ 个全不成对的粒子构成的态，湮没算符对其作用满足 $\tilde{P}|\sigma\ \sigma\ \alpha\ L\ M\rangle = 0$, $c(n,\sigma)$ 是归一化常数，

$$c(n,\sigma) = \sqrt{\frac{(N+2\sigma-2)!!}{((n-\sigma)/2)!(N+n+\sigma-2)!!}}. \tag{6.64}$$

由 $P = \tilde{P}$, 注意 $[P^\rho, b_m^\dagger] = \sqrt{2}\rho P^{\rho-1} \tilde{b}_m$, 有

$$[P, P^{\dagger\rho}] = \rho P^{\dagger\rho-1}(N-2+2\rho+2\hat{n}_b),$$

可以算出

$$
\begin{aligned}
&\langle n\ \sigma\ \alpha\ L\|b^\dagger\|n-1\ \sigma-1\ \alpha_1\ L_1\rangle_{so(3)}\\
&=\sqrt{\frac{N+n+\sigma-2}{N+2\sigma-2}}\langle\sigma\ \sigma\ \alpha\ L\|b^\dagger\|\sigma-1\ \sigma-1\ \alpha_1\ L_1\rangle_{so(3)},\\
&\langle n\ \sigma\ \alpha\ L\|b^\dagger\|n-1\ \sigma+1\ \alpha_1\ L_1\rangle_{so(3)}\\
&\sqrt{\frac{n-\sigma}{N+2\sigma}}\langle\sigma\ \sigma\ \alpha\ L\|\ \tilde{b}\ \|\sigma+1\ \sigma+1\ \alpha_1\ L_1\rangle_{so(3)}.
\end{aligned}
$$

用 $\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [\sigma-1] & [\sigma]\\ (1) & (\sigma-1) & (\sigma)\end{array}\right\rangle=1$, 和 $so(N)\supset so(3)$ 约化系数倒易律 (6.62), 可得 $u(N)\supset so(N)$ 约化系数

$$
\begin{aligned}
\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [n-1] & [n]\\ (1) & (\sigma-1) & (\sigma)\end{array}\right\rangle&=\sqrt{\frac{\sigma(N+n+\sigma-2)}{n(N+2\sigma-2)}},\\
\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [n-1] & [n]\\ (1) & (\sigma+1) & (\sigma)\end{array}\right\rangle&=\sqrt{\frac{(n-\sigma)(N+\sigma-2)}{n(N+2\sigma-2)}}.
\end{aligned}
\tag{6.65}
$$

与费密子类似, 用 $su(2)_q$ 的不可约表示及 CG 系数计算 $su(n)\supset so(N)$ 约化系数和 $so(N)\supset so(3)$ 约化系数倒易律, 计算将更为简单, 此处不再赘述.

6.3.4 $so(N)\supset so(3)$ 约化系数的递推公式

$so(N)\supset so(3)$ 约化系数尚无解析公式, 只能用递推公式求出. 由倒易律 (6.62) 知, 只需求出下约化矩阵元即可得全部 $so(N)\supset so(3)$ 约化系数,

$$
\langle\sigma\ \sigma\ \alpha\ L\|b^\dagger\|\sigma-1\ \sigma-1\ \alpha_1\ L_1\rangle_{so(3)}=\sqrt{\sigma}\left\langle\begin{array}{cc|c}(1) & (\sigma-1) & (\sigma)\\ l & \alpha_1\ L_1 & \alpha\ L\end{array}\right\rangle.
\tag{6.66}
$$

设辛弱数小于 σ 的态已知，则由角动量耦合从辛弱数为 $\sigma-1$ 的态，可以得到 σ 个粒子具有角动量 L, 投影 M 的态，

$$
\begin{aligned}
|\Psi(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ M)\rangle &= [b^\dagger|\sigma-1\ \sigma-1\ \alpha_1'\ L_1'\rangle]^L_M \\
&= \sum_{m\ M_1}\langle l\ m\ L_1'\ M_1|L\ M\rangle b^\dagger_m|\sigma-1\ \sigma-1\ \alpha_1'\ L_1'\ M_1\rangle.
\end{aligned} \tag{6.67}
$$

$|\Psi(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ M)\rangle$ 中附加量子数用 $[\alpha_1'\ L_1']$ 标记，也就是用 Ψ 的母态来标记. Ψ 态包含辛弱数为 σ 和 $\sigma-2$ 的态. 辛弱数为 $\sigma-2$ 的态可以用已知的态 $|\sigma\ \sigma-2\ \alpha_2\ L\ M\rangle$ 来展开，于是

$$
\begin{aligned}
|\Psi(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ M)\rangle &= A(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L)|\sigma\ \sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ M\rangle \\
&\quad +\sum_{\alpha_2}B(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ \alpha_2)|\sigma\ \sigma-2\ \alpha_2\ L\ M\rangle.
\end{aligned}
$$

σ 个全不成对的粒子态为

$$
\begin{aligned}
|\sigma\ \sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ M\rangle &= \frac{1}{A(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L)}\Big\{|\Psi(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ M)\rangle \\
&\quad -\sum_{\alpha_2}B(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ \alpha_2)|\sigma\ \sigma-2\ \alpha_2\ L\ M\rangle\Big\}.
\end{aligned} \tag{6.68}
$$

由于已知态 $|\sigma\ \sigma-2\ \alpha_2\ L\ M\rangle$ 是正交归一的，不同辛弱数的态是正交的，所以

$$
\begin{aligned}
B(\sigma\,[\alpha_1'\ L_1']\ L\ \alpha_2) &= \langle\sigma\ \sigma-2\ \alpha_2\ L\|b^\dagger\|\sigma-1\ \sigma-1\ \alpha_1'\ L_1'\rangle_{so(3)} \\
&= \sqrt{\frac{2(2L_1'+1)}{(2L+1)(N+2\sigma-4)}}\langle\sigma-1\ \sigma-1\ \alpha_1'\ L_1'\|b^\dagger\|\sigma-2\ \sigma-2\ \alpha_2\ L\rangle_{so(3)}.
\end{aligned} \tag{6.69}
$$

由 $|\sigma\ \sigma\,[\alpha_1'\ J_1']\ J\ M\rangle$ 的归一化和 (6.69), 可以得到

$$
A(\sigma\,[\alpha_1'\ J_1']\ J)^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \Psi(\sigma[\alpha_1' \, L_1'] \, L \, M) | \Psi(\sigma \, [\alpha_1' \, L_1'] \, L \, M) \rangle \\
&\quad - \sum_{\alpha_2} B(\sigma \, [\alpha_1' \, L_1'] \, L \, \alpha_2)^2 \\
&= 1 + (2L_1'+1) \sum_{\alpha_2 \, L_2} \left[\begin{Bmatrix} l & L_2 & L_1' \\ l & L & L_1' \end{Bmatrix} - \frac{2\delta_{L_2 \, L}}{(2L+1)(N+2\sigma-4)} \right] \\
&\quad \times \langle \sigma - 1 \; \sigma - 1 \; \alpha_1' \; L_1' \| b^\dagger \| \sigma - 2 \; \sigma - 2 \; \alpha_2 \; L_2 \rangle^2 .
\end{aligned} \tag{6.70}
$$

取 $A(\sigma \, [\alpha_1' \, J_1'] \, J)$ 为正，其值可由 (6.70) 算出. 约化矩阵元为

$$
\begin{aligned}
&\langle \sigma \; \sigma \; [\alpha_1' \, L_1'] \, L \| b^\dagger \| \sigma{-}1 \; \sigma{-}1 \; \alpha_1 \; L_1 \rangle = \frac{1}{A(\sigma \, [\alpha_1' \, L_1'] \, L)} \Big\{ \delta_{\alpha_1' \, \alpha_1} \delta_{L_1' \, L_1} \\
&\quad + (-)^{L_1 + L_1'} \sqrt{(2L_1'+1)(2L_1+1)} \sum_{\alpha_2 \, L_2} \left[\begin{Bmatrix} l & L_2 & L_1' \\ l & L & L_1 \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\delta_{L \, L_2}}{(2L+1)(N+2\sigma-4)} \right] \langle \sigma{-}1 \; \sigma{-}1 \; \alpha_1' \; L_1' \| b^\dagger \| \sigma{-}2 \; \sigma{-}2 \; \alpha_2 \; L_2 \rangle \\
&\quad \times \langle \sigma - 1 \; \sigma - 1 \; \alpha_1 \; L_1 \| b^\dagger \| \sigma - 2 \; \sigma - 2 \; \alpha_2 \; L_2 \rangle \Big\} .
\end{aligned} \tag{6.71}
$$

这就是显含辛弱数的 CFP 递推公式. 常取

$$
\begin{aligned}
&P(\sigma \, [\alpha_1' \, L_1'] \, \alpha_1 \, L_1 \, L) = \delta_{\alpha_1' \, \alpha_1} \delta_{L_1' \, L_1} \\
&\quad + (-)^{L_1 + L_1'} \sqrt{(2L_1'+1)(2L_1+1)} \sum_{\alpha_2 \, L_2} \left[\begin{Bmatrix} l & L_2 & L_1' \\ l & L & L_1 \end{Bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\delta_{L \, L_2}}{(2L+1)(N+2\sigma-4)} \right] \langle \sigma{-}1 \; \sigma{-}1 \; \alpha_1' \; L_1' \| b^\dagger \| \sigma{-}2 \; \sigma{-}2 \; \alpha_2 \; L_2 \rangle \\
&\quad \times \langle \sigma - 1 \; \sigma - 1 \; \alpha_1 \; L_1 \| b^\dagger \| \sigma - 2 \; \sigma - 2 \; \alpha_2 \; L_2 \rangle ,
\end{aligned} \tag{6.72a}
$$

则有

$$
A(\sigma \, [\alpha_1' \, L_1'] \, L) = \sqrt{P(\sigma \, [\alpha_1' \, L_1'] \, \alpha_1' \, L_1' \, L)}, \tag{6.72b}
$$

$$\langle\sigma\ \sigma\ [\alpha_1'\ L_1']\ L\|b^\dagger\|\sigma-1\ \sigma-1\ \alpha_1\ L_1\rangle=\frac{P(\sigma\ [\alpha_1'\ L_1']\ \alpha_1\ L_1\ L)}{\sqrt{P(\sigma\ [\alpha_1'\ L_1']\ \alpha_1'\ L_1'\ L)}}.\tag{6.72c}$$

与费密子一样，用递推关系 (6.72) 得到的态 $|\sigma\ \sigma\ [\alpha_1'\ L_1']\ L\rangle$，虽满足归一化条件，但是是非正交的和超完备的. 任取一组 $[\alpha_1'\ L_1']$, 都会给出一个态，这些态不是线性独立的，所以还必需从中选出一组正交归一完备态. 也就是说，每从 $\sigma-1$ 到 σ 递推一步，必需进行选取正交归一完备态的手续之后，才能进行下一步从 σ 到 $\sigma+1$ 的递推. 所以说，显含辛弱数的递推关系并不能避开超完备空间引起的舍入误差问题. 当然由于因子化使计算的态空间显著减小，是有优越性的.

用本节算法计算单角动量玻色子 CFP 系数，即代入 $su(N)\supset so(N)$ 约化系数的解析表达式，用计算出的 $so(N)\supset so(3)$ 重复度控制递推关系 (6.72) 的递推过程，可以有效地减小舍入误差的影响. 按此写出的程序 [13], 不仅比原有程序计算效率有很大提高，而且可以计算许多原有程序不能计算的 CFP 系数.

6.4 费密子L-S 耦合波函数

在原子的壳模型中，电子的总轨道角动量 L 和总自旋角动量 S 是分类态的好量子数，在原子核的一些稀土和超铀元素中，核子的总轨道角动量和总自旋角动量也对分类态起作用. 所以本节将研究具有确定轨道角动量 l 和自旋 1/2 的全同费密子体系，在中心力场中运动的波函数. 轨道角动量 l 可以是非负整数. 下面将逐步讨论李代数链分类波函数，李代数链的约化， CFP 系数因子化和显含辛弱数的递推公式等问题.

6.4.1 李代数链分类波函数

将具有轨道角动量 l, 自旋 1/2, 投影分别为 m, m_s 的产生算符和湮没算符简写为 $a^\dagger_{l\ m\ 1/2\ m_s}=a^\dagger_{m\ m_s}$, $a_{l\ m\ 1/2\ m_s}=a_{m\ m_s}$. 它们

满足以下反对易关系

$$\begin{aligned}&\{a^{\dagger}_{m\ m_s},a^{\dagger}_{m'\ m'_s}\}=\{a_{m\ m_s},a_{m'\ m'_s}\}=0,\\&\{a^{\dagger}_{m\ m_s},a_{m'\ m'_s}\}=\delta_{m\ m'}\delta_{m_s\ m'_s}.\end{aligned}\tag{6.73}$$

体系的总轨道角动量算符为

$$\begin{aligned}&L_0=\sum_{m_s}\sum_{m}ma^{\dagger}_{m\ m_s}a_{m\ m_s},\\&L_{\pm1}=\mp\sum_{m_s}\sum_{m}\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)/2}a^{\dagger}_{m\pm1\ m_s}a_{m\ m_s},\end{aligned}\tag{6.74}$$

$L_0, L_{\pm1}$ 是空间转动代数 $so(3)$ 的生成元. $so(3)$ 的每一个不可约表示 L, 就是体系总轨道角动量. 体系总自旋角动量算符为

$$\begin{aligned}&S_0=(1/2)\sum_{m}a^{\dagger}_{m\ 1/2}a_{m\ 1/2}-(1/2)\sum_{m}a^{\dagger}_{m\ -1/2}a_{m\ -1/2},\\&S_{\pm1}=\mp\sqrt{1/2}\sum_{m}a^{\dagger}_{m\ \pm1/2}a_{m\ \mp1/2},\end{aligned}\tag{6.75}$$

$S_0, S_{\pm1}$ 是 $su(2)_s$ 代数的生成元. $su(2)_s$ 的每一个不可约表示 S, 就是体系的总自旋. L-S 耦合即体系具有确定的总轨道角动量 L 和确定的总自旋角动量 S.

取 $N=2l+1$, 具有确定轨道角动量 l 和自旋 $1/2$ 的全同费密子体系的巨希耳伯特空间由算符

$$\begin{aligned}&a^{\dagger}_{m\ m_s}a_{m\ m_s}-1/2,\quad a^{\dagger}_{m\ m_s},\quad a_{m\ m_s},\\&a^{\dagger}_{m\ m_s}a^{\dagger}_{m'\ m'_s},\quad a_{m\ m_s}a_{m'\ m'_s},\quad a^{\dagger}_{m\ m_s}a_{m'\ m'_s},\\&m,m'=l,l-1,\cdots,-l,\ \ m_s,m'_s=1/2,-1/2,\ \ (m,m_s)\neq(m',m'_s)\end{aligned}\tag{6.76}$$

生成, 它们构成李代数 $so(4N+1)$ 的生成元. 其 Cartan 子代数的基为 $H_{m\ m_s}=a^{\dagger}_{m\ m_s}a_{m\ m_s}-1/2, m=l,l-1,\cdots,-l, m_s=1/2,-1/2$. 代表费密子巨希耳伯特空间的是 $so(4N+1)$ 的 $(1/2,1/2,\cdots,1/2)=((1/2)^{2N})$ 不可约表示. 其最高权态是每一个磁量子数上有一个粒子.

$so(4N+1)$ 有子代数 $so(4N)$, 其生成元为

$$\begin{aligned}
&a^\dagger_{m\,m_s}a_{m\,m_s}-1/2,\\
&a^\dagger_{m\,m_s}a^\dagger_{m'\,m'_s},\qquad a_{m\,m_s}a_{m'\,m'_s},\qquad a^\dagger_{m\,m_s}a_{m'\,m'_s},\\
&\;m,m'=l,l-1,\cdots,-l,\;\; m_s,m'_s=1/2,-1/2,\;\;(m,m_s)\neq(m',m'_s),
\end{aligned}\tag{6.77}$$

即除了单个粒子的产生和湮没算符之外，包含 $so(4N+1)$ 的全部生成元，其 Cartan 子代数基与 $so(4N+1)$ 一样．所以有偶数个粒子的态与有奇数个粒子的态，在 $so(4N)$ 的作用下，不会相互转化．不可约表示 $((1/2)^{2N})$ 给出有偶数个粒子的巨希耳伯特空间，不可约表示 $((1/2)^{2N-1},-1/2)$ 给出有奇数个粒子的巨希耳伯特空间．

粒子数守恒的最大李代数为 $u(2N)$. $u(2N)$ 的 Cartan 子代数基为 $H_{m\,m_s}=a^\dagger_{m\,m_s}a_{m\,m_s}$，其他生成元为 $a^\dagger_{m\,m_s}a_{m'\,m'_s}$，其中 $m,m'=l,l-1,\cdots,-l$, $m_s,m'_s=1/2,-1/2$, $(m,m_s)\neq(m',m'_s)$. 具有 n 个粒子的空间构成 $u(2N)$ 的一个不可约表示空间，注意费密子满足泡利不相容原理，所以标记此不可约表示的最高权为 $[1^n]$.

为了以后写转动不变的形式方便，常将 $u(2N)$ 的生成元写成 $so(3)\otimes su(2)_s$ 的不可约张量形式． $a^\dagger_{m\,m_s}$ 是 $so(3)$ 的 l 秩不可约张量，是 $su(2)_s$ 的 1/2 秩不可约张量．而 $a_{m\,m_s}$ 却不是 $so(3)$ 和 $su(2)_s$ 的不可约张量．可以证明 $\tilde a_{m\,m_s}=(-)^{l+m+1/2+m_s}a_{-m\,-m_s}$ 是 $so(3)$ 的 l 秩不可约张量，$su(2)_s$ 的 1/2 秩不可约张量．所以在写不可约张量形式时，总用 $\tilde a_{m\,m_s}$ 代替 $a_{-m\,-m_s}$. $u(2N)$ 生成元的不可约张量形式为

$$\begin{aligned}
(a^\dagger\tilde a)^{k\,\kappa}_{q\,\pi}=&\sum_{m'\,m\,m'_s\,m_s}\langle l\,m'\,l\,m|k\,q\rangle\,\langle 1/2\,m'_s\,1/2\,m_s|\kappa\,\pi\rangle\\
&\times a^\dagger_{m'\,m'_s}\,\tilde a_{m\,m_s},\quad k=0,1,\cdots,2l,\quad \kappa=0,1,\\
&q=k,k-1,\cdots,-k,\quad \pi=\kappa,\kappa-1,\cdots,-\kappa.
\end{aligned}\tag{6.78}$$

它们满足以下对易关系，

$$
\begin{aligned}
&[(a^\dagger\tilde{a})^{k\ \kappa}_{q\ \pi},(a^\dagger\tilde{a})^{k'\ \kappa'}_{q'\ \pi'}]=\sqrt{(2k+1)(2k'+1)(2\kappa+1)(2\kappa'+1)}\\
&\quad\times\sum_{k''\ \kappa''}((-)^{k+k'+\kappa+\kappa'}-(-)^{k''+\kappa''})\langle k\ q\ k'\ q'|k''\ q''\rangle\\
&\quad\times\langle\kappa\ \pi\ \kappa'\ \pi'|\kappa''\ \pi''\rangle\begin{Bmatrix}k & k' & k''\\ l & l & l\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa & \kappa' & \kappa''\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}\\
&\quad\times(a^\dagger\tilde{a})^{k''\ \kappa''}_{q''\ \pi}.
\end{aligned}
\tag{6.79}
$$

费密子数算符 $\hat{n}_f=\sum_{m\ m_s}a^\dagger_{m\ m_s}a_{m\ m_s}=\sqrt{2N}(a^\dagger\tilde{a})^{0\,0}$ 生成李代数 $u(1)_n$. 而 $u(2N)=u(1)_n\oplus su(2N)$. $su(2N)$ 是 $so(4N)$ 保持粒子数守恒的子代数. 在等价原则下，$su(2N)$ 的不可约表示也用 $[1^n]$ 标记.

$u(2N)$ 的轨道部分，即生成元 $(a^\dagger\tilde{a})^{k\ 0}_{q\ 0}$ 生成李代数 $u(N)$. 其生成元的非耦合形式为 $E_{m\ m'}=\sum_{m_s}a^\dagger_{m\ m_s}a_{m'\ m_s}$. 其 Cartan 子代数为 $H_m=E_{m\ m}=\sum_{m_s}a^\dagger_{m\ m_s}a_{m\ m_s}$, $m=l,l-1,\cdots,-l$. H_m 是轨道角动量投影为 m 的粒子数. 考虑到泡利不相容原理，投影为 m 的粒子数最多可以有两个，所以标记 $u(N)$ 不可约表示的最高权为 $[\lambda]=[2^a1^b]$. 同样 $u(N)=u(1)_n\oplus su(N)$. 在等价原则下，$su(N)$ 的不可约表示也用 $[2^a1^b]$ 标记.

由对易关系 (6.79) 可以看出，$u(2N)$ 的轨道部分当 $k=1,3,\cdots,2l-1$ 等奇数时，$(a^\dagger\tilde{a})^{k\ 0}_{q\ 0}$ 构成 $su(N)$ 的子代数 $so(N)$. $so(N)$ 生成元的非耦合形式为

$$\Sigma_{m\ m'}=(-)^{l+m}E_{m'\ -m}-(-)^{l+m'}E_{m\ -m'},$$

其 Cartan 子代数的基为 $H'_m=E_{m\ m}-E_{-m\ -m}=\sum_{m_s}a^\dagger_{m\ m_s}a_{m\ m_s}-\sum_{m_s}a^\dagger_{-m\ m_s}a_{-m\ m_s}$, $m=l,l-1,\cdots,1$. H'_m 是轨道角动量投影为 m 的粒子数减去轨道角动量投影为 $-m$ 的粒子数. 考虑到泡利不相容原理，标记 $so(N)$ 不可约表示的最高权态为 $(2^{a'}1^{b'})$.

由 (6.79) 知当 $k+\kappa$ 为奇数时，即生成元 $(a^\dagger\tilde{a})^{k\ 0}_{q\ 0}$, $k=1,3,\cdots,$

$2l-1$, $(a^\dagger\tilde{a})^{k\,1}_{q\,\pi}$, $k=0,2,\cdots,2l$, 构成李代数 $sp(2N)$. 其生成元的非耦合形式为

$$\Lambda_{m\ m_s\ m'\ m'_s} = a^\dagger_{m\ m_s}\tilde{a}_{m'\ m'_s} + a^\dagger_{m'\ m'_s}\tilde{a}_{m\ m_s}.$$

其 Cartan 子代数基可取为 $H''_m = a^\dagger_{m\ 1/2}a_{m\ 1/2} - a^\dagger_{-m\ -1/2}a_{-m\ -1/2}$, $m=l,l-1,\cdots,-l$. 考虑到泡利不相容原理, 标记 $sp(2N)$ 不可约表示的最高权态为 (1^ν).

取 $P^\dagger$, $\tilde{P}$ 分别为对产生和对湮没算符

$$P^\dagger = \sqrt{\frac{N}{2}}(a^\dagger a^\dagger)^{0\,0}, \quad \tilde{P} = \sqrt{\frac{N}{2}}(\tilde{a}\tilde{a})^{0\,0}. \tag{6.80a}$$

$so(4N)$ 还有子代数 $su(2)_q$, 其生成元为 $Q_0, Q_{\pm1}$

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sqrt{\frac{N}{8}}[(a^\dagger\tilde{a})^{0\,0} + (\tilde{a}a^\dagger)^{0\,0}] = \frac{\hat{n}_f}{2} - \frac{N}{2}, \\ Q_{-1} &= \sqrt{\frac{1}{2}}\tilde{P}, \quad Q_{+1} = \sqrt{\frac{1}{2}}P^\dagger, \end{aligned} \tag{6.80b}$$

$su(2)_q$ 称为准自旋代数, 显然 $sp(2N)$ 是 $su(2)_q$ 不变的.

描述 L-S 耦合费密子体系的李代数链, 可以归纳为以下两条:

$$\begin{aligned} &so(4N+1) \supset so(4N) \supset u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_s \\ &\quad \supset u(1)_n \otimes so(N) \otimes su(2)_s \supset u(1)_n \otimes so(3) \otimes su(2)_s, \end{aligned} \tag{6.81}$$

$$\begin{aligned} &so(4N+1) \supset so(4N) \supset su(2)_q \otimes sp(2N) \\ &\quad \supset su(2)_q \otimes so(N) \otimes su(2)_s \supset u(1)_n \otimes so(3) \otimes su(2)_s. \end{aligned} \tag{6.82}$$

对于粒子数确定的态, 常用李代数链 (6.81) 来分类波函数. 表 6.6 给出此链中每个李代数的生成元, 不变量和不可约表示标记, 其中除不变量 $\hat{n}_f$ 之外, 其余均为 Casimir 算子.

表 6.6

李代数	生成元	不变量	表示
$u(2N)$	$a^{\dagger}_{m\,m_s} a_{m'\,m'_s}$ $(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,\kappa}_{q\,\pi}$	$\sum_{m,m_s} a^{\dagger}_{m\,m_s} a_{m\,m_s} = \hat{n}_f$ $\hat{n}_f(2N+1-\hat{n}_f)$	$[1^n]$
$u(n)$	$E_{m\,m'} = \sum_{m_s} a^{\dagger}_{m\,m_s} a_{m'\,m_s}$ $(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,0}_{q\,0}$	$\hat{n}_f$ $\hat{n}_f(2N+4-\hat{n}_f)/2-2\hat{S}^2$	$[\lambda]=[2^a\,1^b]$ 或$[n\ S]$
$su(2)_s$	$\hat{S}_{\pi} = \sqrt{N/2}(a^{\dagger}\tilde{a})^{0\,1}_{0\,\pi}$	$\hat{S}^2$	$[\tilde{\lambda}]=[a+b\,a]$ $S=b/2$
$o(N)$	$\Xi_{m\,m'} = (-)^{l+m} E_{m'\,-m} - (-)^{l+m'} E_{m\,-m'}$ $(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,0}_{q\,0}$，$k=$ 奇	$\hat{n}_f(2N+2-\hat{n}_f)/2-2\hat{S}^2+2P^{\dagger}\tilde{P}$ 或 $2\sum_{k=\text{奇}}\sum_q (-)^q (a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,0}_{q\,0} (a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,0}_{-q}$	$(2^{a'}\,1^{b'})$ 或 $(\nu\ S)$
$o(3)$	$\hat{L}_q = \sqrt{2l(l+1)N/3}(a^{\dagger}\tilde{a})^{1\,0}_{q\,0}$	$\hat{L}^2$	L
$u(1)_n$	$\hat{n}_f$	$\hat{n}_f$	n
$sp(2N)$	$(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,\kappa}_{q\,\pi}$，$k+\kappa=$ 奇 $a^{\dagger}_{m\,m_s}\tilde{a}_{m'\,m'_s} + a^{\dagger}_{m'\,m'_s}\tilde{a}_{m\,m_s}$	$N(N+2)-4\hat{Q}^2$ $2\sum_{k+\kappa=\text{奇}}\sum_{q\,\pi} (-)^{q+\pi} (a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,\kappa}_{q\,\pi} (a^{\dagger}\tilde{a})^{k\,\kappa}_{-q\,-\pi}$	(1^{ν})
$su(2)_q$	$Q_0 = (\hat{n}_f - N)/2$, $Q_{+1} = \sqrt{N/4}(a^{\dagger}a^{\dagger})^{0\,0}$, $Q_{-1} = \sqrt{N/4}(\tilde{a}\tilde{a})^{0\,0}$	$\hat{Q}^2$	Q

波函数可以写为

$$|[1^n]\,[2^a1^b]\,(2^{a'}1^{b'})\,\alpha\,L\,M\,S\,M_s\rangle = |n\,\nu\,\alpha\,L\,M\,S\,M_s\rangle. \tag{6.83}$$

其中 $a = n/2 - S, b = 2S, \nu = 2a' + b', b'$ 取 b 或 $N - 2a' - b$ 中较小者. α 是附加量子数，反映 $so(N) \supset so(3)$ 的非简单约化.

6.4.2 李代数链的约化

取 a_0 为 0 或 $n - N$ 中较大者，$[n/2]$ 是 $n/2$ 的整数部分，且 $n = 2a + b$, 则 $u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_s$ 的约化为

$$[1^n] = \oplus_{a_0}^{[n/2]}[2^a1^b] \otimes (b/2). \tag{6.84}$$

取 b' 为 b 或 $N - 2a' - b$ 中较小者，则 $u(N) \supset so(N)$ 的约化为

$$[2^a1^b] = \oplus_{a'=0}^{a}(2^{a'}1^{b'}). \tag{6.85}$$

$u(2N) \supset sp(2N)$ 的约化为 $[1^n] = \oplus_\nu(1^\nu)$. 设 $n_0 = \min(n, 2N - n)$, 有

$$\begin{aligned} &\nu = n_0, n_0 - 2, \cdots, 0, \quad n = 偶, \\ &\nu = n_0, n_0 - 2, \cdots, 1, \quad n = 奇. \end{aligned} \tag{6.86}$$

取 b_0 为 ν 或 $N + 1 - \nu$ 中较小者，且 $\nu = 2a' + b'$, 则 $sp(2N) \supset so(N) \otimes su(2)_s$ 的约化为

$$(1^\nu) = \begin{cases} \oplus_{b'=偶}^{b_0}(2^{a'}1^{b'}) \otimes (b'/2), & \nu = 偶, \\ \oplus_{b'=奇}(2^{a'}1^{b'}) \otimes (b'/2), & \nu = 奇. \end{cases} \tag{6.87a}$$

记 $[\nu/2]$ 为 $\nu/2$ 的整数部分，此约化也可写为

$$(1^\nu) = \oplus_{a'=0}^{[\nu/2]}(2^{a'}1^{b'}) \otimes (b'/2). \tag{6.87b}$$

只要再求出 $so(N) \supset so(3)$ 的约化，则求出了波函数所需的全部约化规则. 此处仍采用先求 $u(N) \supset so(3)$ 的约化规则，再利用已

知的 $u(N)\supset so(N)$ 约化规则，求出 $so(N)\supset so(3)$ 的约化规则. 由节 6.2 知 $u(N)$ 的不可约表示 $[1^b]$ 到 $so(3)$ 的约化是已知的，即 $[1^b]=\oplus\beta(b,L)(L)$, 其中 $\beta(b,L)$ 由式 (6.27) 给出. 由 $u(N)$ 不可约表示的直积

$$[1^{a+b}]\otimes[1^a]=\begin{cases}\oplus_{i=0}^{a}[2^{a-i}1^{b+2i}], & 2a+b\le N,\\ \oplus_{i=0}^{N-a-b}[2^{a-i}1^{b+2i}], & 2a+b>N,\end{cases}$$

可将不可约表示写为

$$[2^a1^b]=[1^{a+b}]\otimes[1^a]\ominus[1^{a+b+1}]\otimes[1^{a-1}].$$

记 L_1 的最小值和最大值为 $\check{L_1}$ 和 $\hat{L_1}$, 直积 $[1^{a+b}]\otimes[1^a]$ 含轨道角动量 L 的重复度为

$$\chi(1^{a+b},1^a,L,l)=\sum_{\check{L_1}}^{\hat{L_1}}\beta(a+b,L_1)\sum_{L_2=|L-L_1|}^{L+L_1}\beta(a,L_2),\qquad(6.88\text{a})$$

则不可约表示 $[2^a1^b]$ 含轨道角动量 L 的重复度为

$$\chi(1^{a+b},1^a,L,l)-\chi(1^{a+b+1},1^{a-1},L,l).\qquad(6.88\text{b})$$

由已知 $u(N)\supset so(N)$ 的约化知

$$(2^a1^b)=[2^a1^b]\ominus[2^{a-1}1^b],$$

可得 $so(N)$ 不可约表示含轨道角动量 L 的重复度为

$$\begin{aligned}&\chi(1^{a+b},1^a,L,l)-\chi(1^{a+b+1},1^{a-1},L,l)-\chi(1^{a+b-1},1^{a-1},L,l)\\&+\chi(1^{a+b},1^{a-2},L,l).\end{aligned}\qquad(6.89)$$

这样就求出了李代数链中所有的约化.

在讨论完李代数链的约化后，可以看出用下两条李代数链

$$u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_s \supset u(1)_n \otimes so(n) \times su(2)_s$$
$$\supset u(1)_n \otimes so(3) \times su(2)_s,$$
$$sp(2N) \otimes su(2)_q \supset so(N) \otimes su(2)_s \otimes su(2)_q$$
$$\supset so(3) \otimes su(2)_s \otimes su(2)_q,$$

分类波函数，具有同样后果．因为波函数同样为 $n, \nu, \alpha, L, M, S, M_s$ 等量子数所决定．具体为

$$|n\ \nu\ S\ M_s\ \alpha\ L\ M\rangle$$
$$= |Q=(N-\nu)/2\ \ M_q=(n-N)/2\ \ S\ M_s\ \alpha\ L\ M\rangle. \tag{6.90}$$

6.4.3 CFP 系数的因子化

通过直接做 $a^\dagger_{m\ m_s}, \tilde{a}_{m\ m_s}$ 与表 6.6 给出的各李代数生成元间对易关系，可以证明产生和湮没算符是各李代数的不可约张量，其秩由表 6.7 给出．除表 6.7 之外， $a^\dagger_{m\ m_s}$ 还是 $u(2N)$ 和 $u(N)$ 的 $[1]$ 秩不可约张量． $a^\dagger_{m\ m_s}$ 和 $\tilde{a}_{m\ m_s}$ 还构成 $su(2)_q$ 的 1/2 秩不可约张量，分别对应于 $1/2, -1/2$ 和 $1/2, 1/2$ 分量．产生和湮没算符的不可约张量性质，对 CFP 系数的因子化，具有重要作用．

表 6.7　产生和湮没算符作为不可约张量的秩

	$su(2N)$	$su(N)$	$su(2)_s$	$so(N)$	$so(3)$
$a^\dagger_{m\ m_s}$	$[1]$	$[1]$	$1/2$	(1)	1
$\tilde{a}_{m\ m_s}$	$[1^{2N-1}]$	$[1^{N-1}]$	$1/2$	(1)	1

由产生算符的不可约张量性质，利用 Wigner-Eckart 定理和半单紧致李代数的完全可约性，有

$$\langle n\ \nu\ S\ \alpha\ L \| a^\dagger \| n-1\ \nu_1\ S_1\ \alpha_1\ L_1 \rangle_{so(3)\times su(2)_s}$$
$$= \left\langle \begin{matrix} [1] & [1^{n-1}] \\ [1\ 1/2] & [n{-}1\ S_1] \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [1^n] \\ [n\ S] \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} [1\ 1/2] & [n{-}1\ S_1] \\ (1\ 1/2) & (\nu_1\ S_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [n\ S] \\ (\nu\ S) \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,1/2) & (\nu_1\,S_1) & (\nu\,S) \\ l & \alpha_1\,L_1 & \alpha\,L \end{array} \right\rangle \langle n\|a^\dagger\|n-1\rangle_{u(2N)}, \qquad (6.91)$$

其中 $u(N)$ 和 $so(N)$ 的不可约表示分别用 $[n\ S]$ 和 $(\nu\ S)$ 标记. $\left\langle \begin{array}{cc|c} [1\,1/2] & [n-1\,S_1] & [n\,S] \\ (1\,1/2) & (\nu_1\,S_1) & (\nu\,S) \end{array} \right\rangle$ 和 $\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,1/2) & (\nu_1\,S_1) & (\nu\,S) \\ l & \alpha_1\,L_1 & \alpha\,L \end{array} \right\rangle$ 分别为 $u(N) \supset so(N)$ 和 $so(N) \supset so(3)$ 的约化系数.

$\left\langle \begin{array}{cc|c} [1] & [1^{n-1}] & [1^n] \\ [1\,1/2] & [n-1\,S_1] & [n\,S] \end{array} \right\rangle$ 是 $u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_s$ 的约化系数, 也可写成 $\left\langle \begin{array}{cc|c} [1] & [1^{n-1}] & [1^n] \\ [1]\otimes[1] & [\lambda_1]\otimes[\tilde{\lambda}_1] & [\lambda]\otimes[\tilde{\lambda}] \end{array} \right\rangle$, 其中 $[\lambda] = [2^{n/2-S}1^{2S}]$, $[\tilde{\lambda}] = [n/2+S\ \ n/2-S]$, $[\lambda_1] = [2^{(n-1)/2-S_1}1^{2S_1}]$, $[\tilde{\lambda}_1] = [(n-1)/2+S_1\ \ (n-1)/2-S_1]$. 可以算出

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} [1] & [1^{n-1}] & [1^n] \\ [1\,1/2] & [n-1\,S+1/2] & [n\,S] \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{(S+1)(n-2S)}{n(2S+1)}}, \qquad (6.92a)$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} [1] & [1^{n-1}] & [1^n] \\ [1\,1/2] & [n-1\,S-1/2] & [n\,S] \end{array} \right\rangle = (-)^{2S-1}\sqrt{\frac{S(n+2S+2)}{n(2S+1)}}. \qquad (6.92b)$$

采用与单角动量费密子同样方法, 可以算出产生算符的 $u(2N)$ 约化矩阵元,

$$\langle n\|a^\dagger\|n-1\rangle_{u(2N)} = \sqrt{n}. \qquad (6.93)$$

先证明 $so(N) \supset so(3)$ 约化系数的倒易律. 利用产生和湮没算符均为 $so(N)$ 的不可约张量及它们的关系, 可得

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,1/2) & (\nu+1\,S_1) & (\nu\,S) \\ l & \alpha_1\,L_1 & \alpha\,L \end{array} \right\rangle \langle(\nu\,S)\|\,\tilde{a}\,\|(\nu+1\,S_1)\rangle_{so(N)}$$

$$= (-)^{l+L_1-L+1/2+S_1-S}\sqrt{\frac{(2L_1+1)(2S_1+1)}{(2L+1)(2S+1)}}$$

$$\times \left\langle \begin{array}{cc|c} (1\ 1/2) & (\nu\ S) & (\nu{+}1\ S_1) \\ l & \alpha\ L & \alpha_1\ L_1 \end{array} \right\rangle \langle (\nu{+}1\ S_1) \| a^\dagger \| (\nu\ S) \rangle_{so(N)}.$$

两端取绝对值平方，并对 α, L, α_1, L_1 求和，适当选取相因子可得

$$\begin{aligned} &\langle (\nu\ S) \| \tilde{a} \| (\nu{+}1\ S_1) \rangle_{so(N)} \\ &= \sqrt{\frac{(2S_1+1)\dim(\nu{+}1\ S_1)}{(2S+1)\dim(\nu\ S)}} \langle (\nu{+}1\ S_1) \| a^\dagger \| (\nu\ S) \rangle_{so(N)}, \end{aligned}$$

其中 $\dim(\nu\ S)$ 为 $so(N)$ 不可约表示 $(\nu\ S)$ 的维数. 于是可得倒易律为

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\ 1/2) & (\nu+1\ S_1) & (\nu\ S) \\ l & \alpha_1\ L_1 & \alpha\ L \end{array} \right\rangle = (-)^{l+L_1-L+1/2+S_1-S} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{(2L_1{+}1)\dim(\nu\ S)}{(2L{+}1)\dim(\nu{+}1\ S_1)}} \left\langle \begin{array}{cc|c} (1\ 1/2) & (\nu\ S) & (\nu{+}1\ S_1) \\ l & \alpha\ L & \alpha_1\ L_1 \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

具体为

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\ 1/2) & (\nu+1\ S-1/2) & (\nu\ S) \\ l & \alpha_1\ L_1 & \alpha\ L \end{array} \right\rangle \\ &= (-)^{l+L_1-L} \sqrt{\frac{(2L_1+1)(2S+1)(N-\nu+1)(\nu/2-S+1)}{(2L+1)(2S)(N-\nu)(N-\nu/2+S+2)}} \\ &\quad \times \left\langle \begin{array}{cc|c} (1\ 1/2) & (\nu\ S) & (\nu+1\ S-1/2) \\ l & \alpha\ L & \alpha_1\ L_1 \end{array} \right\rangle, \end{aligned} \tag{6.94a}$$

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\ 1/2) & (\nu+1\ S+1/2) & (\nu\ S) \\ l & \alpha_1\ L_1 & \alpha\ L \end{array} \right\rangle \\ &= (-)^{l+L_1-L} \sqrt{\frac{(2L_1+1)(2S+1)(N-\nu+1)(\nu/2+S+2)}{(2L+1)(2S+2)(N-\nu)(N-\nu/2-S+1)}} \end{aligned}$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\nu\, S) \\ l & \alpha\, L \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\nu+1\; S+1/2) \\ \alpha_1\, L_1 \end{matrix} \right\rangle . \tag{6.94b}$$

以下用准自旋代数 $su(2)_q$ 的不可约表示及其 CG 系数来计算 $u(n)\supset so(N)$ 约化系数. 已知

$$\langle n\,\nu\; S\,\alpha\; L\|a^{\dagger}\|n-1\;\nu_1\; S_1\;\alpha_1\; L_1\rangle_{so(3)\otimes su(2)_s} = \sqrt{n}c(n,S,S_1)$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} [1\,1/2] & [n{-}1\; s_1] \\ (1\,1/2) & (\nu_1\; S_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [n\; S] \\ (\nu\; S) \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\nu_1\; S_1) \\ l & \alpha_1\, L_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\nu\; S) \\ \alpha\, L \end{matrix} \right\rangle . \tag{6.95}$$

利用产生和湮没算符的不可约张量性质, 其中 $Q=(N-\nu)/2, M_q=(n-N)/2, Q_1=(N-\nu_1)/2$, 可得

$$\langle n\,\nu\; S\,\alpha\; L\|a^{\dagger}\|n-1\;\nu-1\; S_1\;\alpha_1\; L_1\rangle_{so(3)\times su(2)_s}$$
$$= \sqrt{n}c(n,S,S_1) \left\langle \begin{matrix} [1\,1/2] & [n-1\; s_1] \\ (1\,1/2) & (\nu-1\; S_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [n\; S] \\ (\nu\; S) \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\nu-1\; S_1) \\ l & \alpha_1\, L_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\nu\; S) \\ \alpha\, L \end{matrix} \right\rangle$$
$$= \langle 1/2\;1/2\;Q{+}1/2\;M_q{-}1/2|Q\;M_q\rangle \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\nu{-}1\; S_1) \\ l & \alpha_1\, L_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\nu\; S) \\ \alpha\, L \end{matrix} \right\rangle$$
$$\times \langle (\nu\; S)\|a\|(\nu-1\; S_1)\rangle_{so(N)\otimes su(2)_s\otimes su(2)_q}.$$

取 $n=\nu$, 可得约化矩阵元为

$$\langle (\nu\; S)\|a\|(\nu{-}!\; S_1)\rangle_{so(N)\otimes su(2)_s\otimes su(2)_q}$$
$$= c(\nu,S,S_1)\sqrt{\frac{\nu(N-\nu+2)}{N-\nu+1}}. \tag{6.96}$$

再利用 $so(N)\supset so(3)$ 约化系数的倒易律，可得

$$\langle n-1\;\nu+1\; S_1\;\alpha_1\; L_1\|\tilde{a}\|n\;\nu\; S\;\alpha\; L\rangle_{so(3)\times su(2)_s}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sqrt{n}c(n,S,S_1)\left\langle \begin{array}{cc|c} [1\,1/2] & [n-1\;s_1] & [n\;S] \\ (1\,1/2) & (\nu+1\;S_1) & (\nu\;S) \end{array} \right\rangle \\
&\quad\times\sqrt{\frac{(2S+1)\dim(\nu\;S)}{(2S_1+1)\dim(\nu+1\;S_1)}}\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,1/2) & (\nu\;S) & (\nu+1\;S_1) \\ l & \alpha\,L & \alpha_1\,L_1 \end{array} \right\rangle \\
&= \langle 1/2\;\; -1/2\;Q\,M_q|Q-1/2\;M_q-1/2\rangle\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\,1/2) & (\nu\,S) & (\nu+1\;S_1) \\ l & \alpha\,L & \alpha_1\,L_1 \end{array} \right\rangle \\
&\quad\times\langle(\nu+1\;S_1)\|a\|(\nu\;S)\rangle_{so(N)\otimes su(2)_s\otimes su(2)_q}.
\end{aligned}
$$

注意 $a^\dagger$ 和 $\tilde{a}$ 的 $o(N)\otimes su(2)_s\otimes su(2)_q$ 的约化矩阵元是一样的，于是 $u(N)\supset so(N)$ 的约化系数为

$$
\left\langle \begin{array}{cc|c} [1\,1/2] & [n-1\;S_1] & [n\;S] \\ (1\,1/2) & (\nu_1\;S_1) & (\nu\;S) \end{array} \right\rangle
= \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{(2N-n-\nu+2)(\nu-2S)}{2(N-\nu+1)(n-2S)}}, & \nu_1=\nu-1,\;\; S_1=S+1/2, \\[2ex]
\sqrt{\dfrac{(2N-n-\nu+2)(\nu+2S+2)}{2(N-\nu+1)(n+2S+2)}}, & \nu_1=\nu-1,\;\; S_1=S-1/2, \\[2ex]
(-)^{2S+1}\sqrt{\dfrac{(n-\nu)(2N-\nu-2S+2)}{2(N-\nu+1)(n-2S)}}, & \nu_1=\nu+1,\;\; S_1=S+1/2, \\[2ex]
(-)^{2S}\sqrt{\dfrac{(n-\nu)(2N-\nu+2S+4)}{2(N-\nu+1)(n+2S+2)}}, & \nu_1=\nu+1,\;\; S_1=S-1/2.
\end{cases}
\tag{6.97}
$$

所以只需再求出 $so(N)\supset so(3)$ 的约化系数, 便求得了 CFP 系数.

6.4.4 $so(N)\supset so(3)$ 约化系数的递推公式

$so(N)\supset so(3)$ 约化系数尚无解析公式，只能用递推公式求出. 由倒易律 (6.94) 知，只需求出下约化矩阵元即可得全部约化

系数,

$$\begin{aligned}&\langle\nu\,\nu\,\alpha\,L\,S\|a^\dagger\|\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1\,L_1\,S_1\rangle_{so(3)\otimes su(2)_s}\\&=\sqrt{\nu}c(\nu,S,S_1)\left\langle\begin{matrix}(1\,1/2) & (\nu-1\,S_1)\\ l & \alpha_1\,L_1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(\nu\,S)\\ \alpha\,L\end{matrix}\right\rangle.\end{aligned}\tag{6.98}$$

设辛弱数小于 ν 的态已知, 则由角动量耦合从辛弱数为 $\nu-1$ 的态, 可以得到 ν 个粒子具有轨道角动量及投影为 L,M 自旋角动量及投影为 S,M_s 的态,

$$\begin{aligned}&|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s)\rangle=[a^\dagger|\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1'\,L_1'\,S_1'\rangle]^{L\,S}_{M\,M_s}\\&=\sum_{m\,M_1'\,m_s\,M_{s_1}}\langle l\,m\,L_1'\,M_1'|L\,M\rangle\langle 1/2\,m_s\,S_1'\,M_{s_1}'|S\,M_s\rangle\\&\quad\times a^\dagger_{m\,m_s}|\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1'\,L_1'\,M_1'\,S_1'\,M_{s_1}'\rangle.\end{aligned}\tag{6.99}$$

$|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s)\rangle$ 中附加量子数用 $[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']$ 标记, 也就是用 Ψ 的母态来标记. Ψ 态包含辛弱数为 ν 和 $\nu-2$ 的态. 辛弱数为 $\nu-2$ 的态可以用已知的态 $|\nu\,\nu-2\,\alpha_2\,L\,M\,S\,M_s\rangle$ 来展开, 于是

$$\begin{aligned}&|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s)\rangle\\&=A(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,S)|\nu\,\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s\rangle\\&\quad+\sum_{\alpha_2}B(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,S\,\alpha_2)|\nu\,\nu-2\,\alpha_2\,L\,M\,S\,M_s\rangle.\end{aligned}$$

ν 个全不成对的粒子态为

$$\begin{aligned}&|\nu\,\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s\rangle\\&=\frac{1}{A(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,S)}\Big\{|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s)\rangle\\&\quad-\sum_{\alpha_2}B(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,S\,\alpha_2)|\nu\,\nu-2\,\alpha_2\,L\,M\,S\,M_s\rangle\Big\}.\end{aligned}\tag{6.100}$$

由于已知态 $|\nu\,\nu-2\,\alpha_2\,L\,M\,S\,M_s\rangle$ 是正交归一的，不同辛弱数的态是正交的，所以

$$
\begin{aligned}
&B(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,S\,\alpha_2)=\langle\nu\,\nu-2\,\alpha_2\,L\,S\|a^\dagger\|\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1'\,L_1'\,S_1'\rangle\\
&\quad=(-)^{l+L_1'-L+1/2+S_1'-S}\sqrt{\frac{(2L_1'+1)(2S_1'+1)}{(2L+1)(2S+1)(N-\nu+2)}}\\
&\qquad\times\langle\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1'\,L_1'\,S_1'\|a^\dagger\|\nu-2\,\nu-2\,\alpha_2\,L\,S\rangle.
\end{aligned}
\tag{6.101}
$$

由 $|\nu\,\nu\,[\alpha_1'\,J_1']\,J\,M\rangle$ 的归一化和 (6.101), 可以得到

$$
\begin{aligned}
&A(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,S)^2\\
&\quad=\langle\Psi(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s)|\Psi(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,M\,S\,M_s)\rangle\\
&\qquad-\sum_{\alpha_2}B(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,L\,S\,\alpha_2)^2\\
&\quad=1+(-)^{2S_1'}(2L_1'+1)(2S_1'+1)\sum_{\alpha_2\,L_2\,S_2}\left[\begin{Bmatrix} l & L_2 & L_1'\\ l & L & L_1'\end{Bmatrix}\right.\\
&\qquad\times\left.\begin{Bmatrix} 1/2 & S_2 & S_1'\\ 1/2 & S & S_1'\end{Bmatrix}+\frac{(-)^{2S}\delta_{L_2\,L}\delta_{S_2\,S}}{(2L+1)(2S+1)(N-\nu+2)}\right]\\
&\qquad\times\langle\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1'\,L_1'\,S_1'\|a^\dagger\|\nu-2\,\nu-2\,\alpha_2\,L_2\,S_2\rangle^2.
\end{aligned}
\tag{6.102}
$$

取

$$
\begin{aligned}
&R(\nu\,[\alpha_1'\,L_1'\,S_1']\,\alpha_1\,L_1\,S_1\,L\,S)=\delta_{\alpha_1'\,\alpha_1}\delta_{L_1'\,L_1}\delta_{S_1'\,S}\\
&\quad+(-)^{L_1+L_1'+S_1+S_1'}\sqrt{(2L_1'+1)(2L_1+1)(2S_1'+1)(2S_1+1)}\\
&\quad\times\sum_{\alpha_2\,L_2\,S_2}\left[\begin{Bmatrix} l & L_2 & L_1'\\ l & L & L_1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1/2 & S_2 & S_1'\\ 1/2 & S & S_1\end{Bmatrix}\right.\\
&\quad\left.+\frac{(-)^{2S}\delta_{L\,L_2}\delta_{S\,S_2}}{(2L+1)(2S+1)(N-\nu+2)}\right]\\
&\quad\times\langle\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1'\,L_1'\,S_1'\|a^\dagger\|\nu-2\,\nu-2\,\alpha_2\,L_2\,S_2\rangle\\
&\quad\times\langle\nu-1\,\nu-1\,\alpha_1\,L_1\,S_1\|a^\dagger\|\nu-2\,\nu-2\,\alpha_2\,L_2\,S_2\rangle,
\end{aligned}
\tag{6.103}
$$

取 $A(\nu\,[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']\;L\;S)$ 为正，则有

$$A(\nu\,[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']\;L\;S) = \sqrt{R(\nu\,[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']\;\alpha_1'\;L_1'\;S_1'\;L\;S)}. \tag{6.104}$$

显含辛弱数的 CFP 递推公式为

$$\begin{aligned}&\langle \nu\,\nu\,[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']\;L\;S\|a^\dagger\|\nu-1\;\nu-1\;\alpha_1\;L_1\;S_1\rangle \\ &= \frac{R(\nu\,[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']\;\alpha_1\;L_1\;S_1\;L\;S)}{\sqrt{R(\nu\,[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']\;\alpha_1'\;L_1'\;S_1'\;L\;S)}}.\end{aligned} \tag{6.105}$$

用递推关系 (6.105) 得到的态 $|\nu\,\nu\,[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']\;L\;S\rangle$, 虽满足归一化条件，但是是非正交的和超完备的. 任取一组 $[\alpha_1'\;L_1'\;S_1']$, 都会给出一个态, 但它们不是线性独立的, 所以还必需从中选出一组正交归一完备态. 也就是说，每从 $\nu-1$ 到 ν 递推一步，必需进行选取正交归一完备态的手续之后，才能进行下一步从 ν 到 $\nu+1$ 的递推. 所以说，显含辛弱数的递推关系并不能避开超完备空间引起的舍入误差问题. 当然由于因子化使计算的态空间显著减小，是有优越性的.

6.5 含同位旋费密子的波函数

在原子核中，核子的同位旋 T 是分类态的好量子数，本节将研究具有确定角动量 j 和同位旋 1/2 的全同费密子体系，在中心力场中运动的波函数. 角动量 j 可以取任意正半整数. 下面将依次讨论李代数链分类波函数，准自旋代数 $so(5)_t$, 李代数链的约化, CFP 系数因子化，和显含辛弱数的递推公式等问题.

6.5.1 李代数链分类波函数

将具有角动量 j, 同位旋 1/2, 投影分别为 m, m_t 的产生算符和湮没算符简写为 $a^\dagger_{j\;m\;1/2\;m_t} = a^\dagger_{m\;m_t}$, $a_{j\;m\;1/2\;m_t} = a_{m\;m_t}$. 它们

满足以下反对易关系

$$\begin{aligned} &\{a^\dagger_{m\ m_t}, a^\dagger_{m'\ m'_t}\} = \{a_{m\ m_t}, a_{m'\ m'_t}\} = 0, \\ &\{a^\dagger_{m\ m_t}, a_{m'\ m'_t}\} = \delta_{m\ m'}\delta_{m_t\ m'_t}. \end{aligned} \tag{6.106}$$

体系的总角动量算符为

$$\begin{aligned} J_0 &= \sum_{m_t}\sum_{m} m a^\dagger_{m\ m_t} a_{m\ m_t}, \\ J_{\pm 1} &= \mp \sum_{m_t}\sum_{m} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)/2}\, a^\dagger_{m\pm 1\ m_t} a_{m\ m_t}. \end{aligned} \tag{6.107}$$

$J_0, J_{\pm 1}$ 是空间转动代数 $so(3)$ 的生成元. $so(3)$ 的每一个不可约表示 J, 就是体系的总角动量. 体系的总同位旋算符为

$$\begin{aligned} T_0 &= (1/2)\sum_{m} a^\dagger_{m\ 1/2} a_{m\ 1/2} - (1/2)\sum_{m} a^\dagger_{m\ -1/2} a_{m\ -1/2}, \\ T_{\pm 1} &= \mp\sqrt{1/2}\sum_{m} a^\dagger_{m\ \pm 1/2} a_{m\ \mp 1/2}. \end{aligned} \tag{6.108}$$

$T_0, T_{\pm 1}$ 是同位旋空间转动 $so(3)_t \simeq su(2)_t$ 代数的生成元, $so(3)_t$ 的每一个不可约表示 T, 就是体系的总同位旋.

取 $N = 2j+1$, 具有确定角动量 j 和同位旋 $1/2$ 的全同费密子体系的巨希耳伯特空间由算符

$$\begin{aligned} &a^\dagger_{m\ m_t} a_{m\ m_t} - 1/2, \quad a^\dagger_{m\ m_t}, \quad a_{m\ m_t}, \\ &a^\dagger_{m\ m_t} a^\dagger_{m'\ m'_t}, \quad a_{m\ m_t} a_{m'\ m'_t}, \quad a^\dagger_{m\ m_t} a_{m'\ m'_t}, \\ &m, m' = j, j-1, \cdots, -j, \quad m_t, m'_t = 1/2, -1/2, \quad (m, m_t) \neq (m', m'_t) \end{aligned} \tag{6.109}$$

生成, 它们构成李代数 $so(4N+1)$ 的生成元. 其 Cartan 子代数的基为 $H_{m\ m_t} = a^\dagger_{m\ m_t} a_{m\ m_t} - 1/2$, $m = j, j-1, \cdots, -j$, $m_t = 1/2, -1/2$. 代表费密子巨希耳伯特空间的是 $so(4N+1)$ 的 $(1/2, 1/2, \cdots, 1/2) = ((1/2)^{2N})$ 不可约表示. 其最高权态是每一个磁量子数上有一个粒子.

$so(4N+1)$ 有子代数 $so(4N)$, 其生成元为

$$
\begin{aligned}
& a^\dagger_{m\,m_t} a_{m\,m_t} - 1/2, \\
& a^\dagger_{m\,m_t} a^\dagger_{m'\,m'_t}, \quad a_{m\,m_t} a_{m'\,m'_t}, \quad a^\dagger_{m\,m_t} a_{m'\,m'_t}, \\
& m, m' = j, j-1, \cdots, -j, \;\; m_t, m'_t = 1/2, -1/2, \;\; (m, m_t) \neq (m', m'_t).
\end{aligned}
\tag{6.110}
$$

即除了单个粒子的产生和湮没算符之外，包含 $so(4N+1)$ 的全部生成元，其 Cartan 子代数基与 $so(4N+1)$ 一样. 所以有偶数个粒子的态与有奇数个粒子的态，在 $so(4N)$ 的作用下，不会相互转化. 不可约表示 $((1/2)^{2N})$ 给出有偶数个粒子的巨希耳伯特空间, 不可约表示 $((1/2)^{2N-1}, -1/2)$ 给出有奇数个粒子的巨希耳伯特空间.

粒子数守恒的最大李代数为 $u(2N)$. $u(2N)$ 的 Cartan 子代数基为 $H_{m\,m_t} = a^\dagger_{m\,m_t} a_{m\,m_t}$, 其他生成元为 $a^\dagger_{m\,m_t} a_{m'\,m'_t}$, 其中 $m, m' = j, j-1, \cdots, -j$, $m_t, m'_t = 1/2, -1/2$, $(m, m_t) \neq (m', m'_t)$. 具有 n 个粒子的空间构成 $u(2N)$ 的一个不可约表示空间，注意费密子满足泡利不相容原理，所以标记此不可约表示的最高权为 $[1^n]$.

为了以后写转动不变的形式方便，常将 $u(2N)$ 的生成元写成 $so(3) \otimes su(2)_t$ 的不可约张量形式. $a^\dagger_{m\,m_t}$ 是 $so(3)$ 的 j 秩不可约张量，是 $su(2)_t$ 的 1/2 秩不可约张量. 而 $a_{m\,m_t}$ 却不是 $so(3)$ 和 $su(2)_t$ 的不可约张量. 可以证明 $\tilde{a}_{m\,m_t} = (-)^{j+m+1/2+m_t} a_{-m\,-m_t}$ 是 $so(3)$ 的 j 秩不可约张量， $su(2)_t$ 的 1/2 秩不可约张量. 所以在写不可约张量形式时，总用 $\tilde{a}_{m\,m_t}$ 代替 $a_{-m\,-m_t}$. $u(2N)$ 生成元的不可约张量形式为

$$
\begin{aligned}
(a^\dagger \tilde{a})^{k\,\kappa}_{q\,\pi} = & \sum_{m'\,m\,m'_t\,m_t} \langle l\,m'\,l\,m | k\,q \rangle \langle 1/2\,m'_t\,1/2\,m_t | \kappa\,\pi \rangle \\
& \times a^\dagger_{m'\,m'_t} \tilde{a}_{m\,m_t}, \quad k = 0, 1, \cdots, 2j, \quad \kappa = 0, 1, \\
& q = k, k-1, \cdots, -k, \quad \pi = \kappa, \kappa-1, \cdots, -\kappa,
\end{aligned}
\tag{6.111}
$$

耦合形式生成元也满足对易关系 (6.79).

总粒子数算符 $\hat{n}_f = \sum_{m\,m_t} a^\dagger_{m\,m_t} a_{m\,m_t} = \sqrt{2N}(a^\dagger \tilde{a})^{0\,0}_{0\,0}$ 生成李代数 $u(1)_n$. 而 $u(2N) = u(1)_n \oplus su(2N)$, $su(2N)$ 是 $so(4N)$ 的保持粒子数守恒的子代数. 在等价原则下, $su(2N)$ 的不可约表示也用 $[1^n]$ 标记.

$u(2N)$ 的空间部分, 即生成元 $(a^\dagger \tilde{a})^{k\,0}_{q\,0}$ 生成李代数 $u(N)$. 其生成元的非耦合形式为 $E_{m\,m'} = \sum_{m_t} a^\dagger_{m\,m_t} a_{m'\,m_t}$. 其 Cartan 子代数为 $H_m = E_{m\,m} = \sum_{m_t} a^\dagger_{m\,m_t} a_{m\,m_t}$, $m = j, j-1, \cdots, -j$. H_m 是角动量投影为 m 的粒子数. 考虑到泡利不相容原理, 投影为 m 的粒子数最多可以有两个, 所以标记 $u(N)$ 不可约表示的最高权为 $[\lambda] = [2^a 1^b]$. 而 $u(N) = u(1)_n \oplus su(N)$, 在等价原则下, $su(N)$ 的不可约表示也用 $[2^a 1^b]$ 标记.

$su(2N)$ 的空间部分, 由对易关系 (6.79) 可以看出, 当 $k = 1, 3, \cdots, 2j$ 等奇数时, $(a^\dagger \tilde{a})^{k\,0}_{q\,0}$ 构成 $u(N)$ 的子代数 $sp(N)$. $sp(N)$ 生成元的非耦合形式为

$$\Xi_{m\,m'} = (-)^{j+m} E_{-m\,m'} + (-)^{j+m'} E_{-m'\,m}.$$

取 $m = j, j-1, \cdots, 1/2$, 其 Cartan 子代数的基可以取为 $H'_m = (-)^{j-m} \Xi_{m\,-m} = \sum_{m_t} a^\dagger_{m\,m_t} a_{m\,m_t} - \sum_{m_t} a^\dagger_{-m\,m_t} a_{-m\,m_t}$,
H'_m 是角动量投影为 m 的粒子数减去角动量投影为 $-m$ 的粒子数. 考虑到泡利不相容原理, 标记 $sp(N)$ 不可约表示的最高权态为 $(2^{a'} 1^{b'})$.

$so(4N)$ 还有子代数 $so(5)_t$, 其生成元除同位旋算符 $T_0, T_{\pm 1}$ 外, 还有

$$\begin{aligned} &D = N - \hat{n}_f, \quad \hat{n}_f = \sum_{m\,m_t} a^\dagger_{m\,m_t} a_{m\,m_t}, \\ &\tilde{P}_q = \sqrt{\frac{N}{2}} (\tilde{a}\tilde{a})^{0\,1}_{0\,q}, \quad q = 0, \pm 1, \\ &P^\dagger_q = \sqrt{\frac{N}{2}} (a^\dagger a^\dagger)^{0\,1}_{0\,q}, \quad q = 0, \pm 1. \end{aligned} \tag{6.112}$$

表 6.8

李代数	生成元	不变量	表示
$u(2N)$	$a^{\dagger}_{m\ m_t} a_{m'\ m'_t}$ $(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\ \kappa}_{q\ \pi}$	$\hat{n}_f$ $\hat{n}_f(2N+1-\hat{n}_f)$	$[1^n]$
$u(n)$	$E_{m\ m'} = \sum_{m_t} a^{\dagger}_{m\ m_t} a_{m'\ m_t}$ $(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\ 0}_{q\ 0}$	$\hat{n}_f$ $\hat{n}_f(2N+4-\hat{n}_f)/2 - 2\hat{T}^2$	$[\lambda] = [2^a\ 1^b]$ 或 $[n\ T]$
$o(3)_t$	$\hat{T}_q = \sqrt{N/2}(a^{\dagger}\tilde{a})^{0\ 1}_{0\ \pi}$	$\hat{T}^2$	$[\tilde{\lambda}]$ $T = b/2$
$sp(N)$	$\Xi_{m\ m'} = (-)^{j+m} E_{-m\ m'} + (-)^{j+m'} E_{-m'\ m}$ $(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\ 0}_{q\ 0}$，$k=$ 奇	$\hat{n}_f(2N+6-\hat{n}_f)/2 - 2\hat{T}^2 - 2P^{\dagger}\cdot\tilde{P}$ $\sum_{k=\text{奇}}(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\ 0}\cdot(a^{\dagger}\tilde{a})^{k\ 0}$	$(2^{a'}\ 1^{b'})$ 或 $(s\ t)$
$O(3)$	$\hat{J}_q = \sqrt{2j(j+1)N/3}(a^{\dagger}\tilde{a})^{1\ 0}_{q\ 0}$	$\hat{J}^2$	J
$u(1)_n$	$\hat{n}_f$	$\hat{n}_f$	n
$o(5)_t$	$\hat{T}_q$，$D = N - \hat{n}_f$ $P^{\dagger}_q$，$\tilde{P}_q$	$N(N+6)/2 - \hat{n}_f(2N+6-\hat{n}_f)/2$ $+2\hat{T}^2 + 2P^{\dagger}$	$(\hat{\epsilon}\ t)$

其中 $\hat{n}_f$ 是粒子数算符，它生成的李代数可记为 $u(1)_n$. D 生成的李代数记为 $u(1)_d$. $P_q^\dagger$, $\tilde{P}_q$ 也称为对产生和对湮没算符，但它们带有同位旋量子数. $so(5)_t$ 也称为准自旋代数，直接做对易关系可以证明 $sp(N)$ 是 $so(5)_t$ 不变的.

描述含同位旋费密子体系的李代数链，可以归纳为以下两条:

$$\begin{aligned} & so(4N+1) \supset so(4N) \supset u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_t \\ & \quad \supset u(1)_n \otimes sp(N) \otimes su(2)_t \supset u(1)_n \otimes so(3) \otimes su(2)_t, \end{aligned} \tag{6.113}$$

$$\begin{aligned} & so(4N+1) \supset so(4N) \supset so(5)_t \otimes sp(N) \\ & \quad \supset su(2)_t \otimes u(1)_d \otimes so(3). \end{aligned} \tag{6.114}$$

对于粒子数确定的态，常用李代数链 (6.113) 来分类波函数. 表 6.8 给出此链中每个李代数的生成元，不变量和不可约表示标记. 其中除不变量 $\hat{n}_f$ 之外，其余均为 Casimir 算子.

波函数可以写为

$$|[1^n]\,[2^a 1^b]\,\beta\,(2^{a'} 1^{b'})\,\alpha\,J\,M\,T\,M_t\rangle = |n\,\beta\,(s\,t)\,\alpha\,J\,M\,T\,M_t\rangle, \tag{6.115}$$

其中 $a = n/2 - T, b = 2T, n$ 是粒子数，T 是同位旋. $s = 2a' + b'$ 代表空间部分不成对的粒子数，s 称为广义辛弱数，也简称辛弱数. $t = b'/2, t$ 称为约化同位旋，是不成对的粒子的同位旋. α 是反映 $sp(N) \supset so(3)$ 非简单约化的附加量子数，β 是反映 $u(N) \supset sp(N)$ 非简单约化的附加量子数.

6.5.2 $so(5)_t$ 的不可约表示和约化系数

3.3 节曾在 Gelfand 基下，给出 $so(5)$ 的不可约表示和约化系数. 此处要求 $so(5)_t$ 的不可约表示，需保持体系具有确定的粒子数和同位旋，即要求在李代数链

$$so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d \tag{6.116}$$

下，求 $so(5)_t$ 的不可约表示和约化系数．虽然在此链下表示和约化系数，比第三章 Gelfand 基下的表示和约化系数要复杂得多，但这是必须满足的物理条件．类似情况在物理问题中经常遇到．

已知 $so(5)_t$ 的生成元为 $T_q, P_q^\dagger, \tilde{P}_q, D$, $q=0,\pm 1$. 设 Cartan 子代数的 Chevalley 基为 $h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}$, 也可取 Cartan 子代数基为

$$
\begin{aligned}
&D = 2h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2} = N - \hat{n}_f, \\
&T_0 = h_{\alpha_2}/2.
\end{aligned} \tag{6.117}
$$

同位旋算符 $\hat{T}^2 = -T_{+1}T_{-1} - T_{-1}T_{+1} + T_0^2$ 与 D, T_0 一起构成一组可对易力学量，所以可取 $D, \hat{T}^2, T_0$ 的共同本征矢为表示空间的基，其中 $\hat{T}^2$ 本征值为同位旋量子数，D, T_0 的本征值为权．设不可约表示的最高权为 $(\hat{\epsilon}\, t)$, 则有

$$
\begin{aligned}
&D\left|\begin{array}{c}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\, M_t\end{array}\right\rangle = \epsilon\left|\begin{array}{c}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\, M_t\end{array}\right\rangle, \\
&\hat{T}^2\left|\begin{array}{c}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\, M_t\end{array}\right\rangle = T(T+1)\left|\begin{array}{c}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\, M_t\end{array}\right\rangle, \\
&T_0\left|\begin{array}{c}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\, M_t\end{array}\right\rangle = M_t\left|\begin{array}{c}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\, M_t\end{array}\right\rangle,
\end{aligned} \tag{6.118}
$$

其中 $\hat{\epsilon}$ 为 ϵ 的最大值．以后可以看到，附加量子数 T 不足以解除权空间的简并，所以在这组基下，存在附加量子数 β 的问题．由于附加量子数问题存在，故致今尚未能全部给出 $so(5)_t$ 的不可约表示和约化系数的解析表达式．下面介绍用张量基方法求不可约表示并给出部分有用结果．

在基 (6.118) 下，D, T_q 的表示矩阵是已知的，只需再求出 $P_q^\dagger, \tilde{P}_q$ 的表示矩阵即求出了此表示．由 T_q 和 $P_q^\dagger, \tilde{P}_q$ 的对易关系可以证明 $P_q^\dagger, \tilde{P}_q$ 均为 $su(2)_t$ 的 1 秩不可约张量．$P_q^\dagger$ 使 D 的本征值减 2, $\tilde{P}_q$ 使 D 的本征值加 2. 因此只要求出它们的约化矩阵元就求出了不可约表示．对最高权态有

$$\tilde{P}_q \left| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}\ t\ t \end{array} \right\rangle = 0, \qquad T_{+1} \left| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}\ t\ t \end{array} \right\rangle = 0. \tag{6.119}$$

即最高权态是全不成对的粒子组成的，所以 $\hat{\epsilon} = N - s$，相应的 t 正好是约化同位旋.

因此可以看出用下两条李代数链

$$\begin{aligned} &u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_t \supset u(1)_n \otimes sp(N) \times su(2)_t \\ &\qquad \supset u(1)_n \otimes so(3) \times su(2)_t, \\ &sp(N) \otimes so(5)_t \supset so(3) \otimes su(2)_t \end{aligned}$$

分类波函数，具有同样结果. 因为波函数同样为 $n, \beta, (s\ t), \alpha, J, M, T, M_t$ 等量子数所决定. 具体为

$$\begin{aligned} |n\ \beta\ (s\ t)\ \alpha\ J\ M\ T\ M_t\rangle &= \left| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ T\ \beta\ M_t(\alpha\ J\ M) \end{array} \right\rangle, \\ \hat{\epsilon} = N - s, &\quad \epsilon = N - n. \end{aligned} \tag{6.120}$$

$P_q^\dagger, \tilde{P}_q$ 满足对易关系

$$[\tilde{P}_q, P_{q'}^\dagger] = -2\sqrt{2}\langle 1\ q\ 1\ q' | 1\ q{+}q' \rangle T_{q+q'} + (-)^q \delta_{q'\ -q} D. \tag{6.121a}$$

也可把对易关系写成耦合张量形式

$$\begin{aligned} (\tilde{P}P^\dagger)_0^0 - (P^\dagger \tilde{P})_0^0 &= -\sqrt{3}D, \\ (\tilde{P}P^\dagger)_q^1 + (P^\dagger \tilde{P})_q^1 &= -2\sqrt{2}T_q, \\ (\tilde{P}P^\dagger)_k^2 - (P^\dagger \tilde{P})_k^2 &= 0. \end{aligned} \tag{6.121b}$$

定义约化矩阵元为

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ T\ M_t\ \beta \end{array} \right| P_q^\dagger \left| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon'\ T'\ M_t'\ \beta' \end{array} \right\rangle \\ &= \delta_{\epsilon'\ \epsilon+2} \langle 1\ q\ T'\ M_t' | T\ M_t \rangle \left\langle \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ T\ \beta \end{array} \right\| P^\dagger \left\| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon'\ T'\ \beta' \end{array} \right\rangle. \end{aligned} \tag{6.122}$$

利用

$$(P_q^\dagger)^\dagger = (-)^q \tilde{P}_{-q}. \tag{6.123}$$

可得

$$\left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon + 2\, T'\, \beta' \end{matrix} \middle\| \tilde{P} \middle\| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon\, T\, \beta \end{matrix} \right\rangle = (-)^{T-T'} \sqrt{\frac{2T+1}{2T'+1}} \left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon\, T\, \beta \end{matrix} \middle\| P^\dagger \middle\| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon + 2\, T'\, \beta' \end{matrix} \right\rangle^* . \tag{6.124}$$

取相因子使约化矩阵元为实，所以只需求出 $P^\dagger$ 的约化矩阵元即可.

以下用递推方法求 $P^\dagger$ 的约化矩阵元. 设不可约表示 $(\hat{\epsilon}\, t)$ 中，D 本征值大于 ϵ 的正交归一态是已知的，如

$$\left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon + 2\, T'\, M_t'\, \beta' \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon + 4\, T''\, M_t''\, \beta'' \end{matrix} \right\rangle, \cdots,$$

是已知的. 则可定义 D 本征值为 ϵ 的态为

$$\left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon\, T\, (T'\, \beta')\, M_t \end{matrix} \right\rangle = \sum_{q, M_t'} \langle 1\, q\, T'\, M_t' | T\, M_t \rangle P_q^\dagger \left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon + 2\, T'\, \beta'\, M_t' \end{matrix} \right\rangle . \tag{6.125}$$

(6.125) 态中附加量子数 $(T'\, \beta')$ 表示此态是用对产生算符耦合于上一级 $\epsilon + 2$, 其同位旋和附加量子数为 T' 和 β' 的态而得. 显然这样得到的态是超完备和非正交归一的. 由 (6.121) 和 (6.124) 可得内积

$$\left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon\, T\, (T''\, \beta'')\, M_t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\, t) \\ \epsilon\, T\, (T'\, \beta')\, M_t \end{matrix} \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{T''\,T'}\delta_{\beta''\,\beta'}[\epsilon+4+T'(T'+1)-T(T+1)] \\
&\quad + \sum_{\tilde{T}\,\tilde{\beta}} (-)^{T'+T''}\sqrt{(2T'+1)(2T''+1)} \begin{Bmatrix} 1 & T' & T \\ 1 & T'' & \tilde{T} \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon+2\,T''\,\beta'' \end{matrix} \middle\| P^{\dagger} \middle\| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon+4\,\tilde{T}\,\tilde{\beta} \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon+2\,T'\,\beta' \end{matrix} \middle\| P^{\dagger} \middle\| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon+4\,\tilde{T}\,\tilde{\beta} \end{matrix} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{6.126}
$$

容易证明此内积与 M_t 无关，并且等于约化矩阵元

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,T\,(T''\,\beta'') \end{matrix} \middle\| P^{\dagger} \middle\| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon+2\,T'\,\beta' \end{matrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,T\,(T''\,\beta'')\,M_t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,T\,(T'\,\beta')\,M_t \end{matrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,T\,(T''\,\beta'') \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,T\,(T'\,\beta') \end{matrix} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{6.127}
$$

所以 (6.126) 也就是约化矩阵元的递推公式，当然此是非正交归一态下约化矩阵元.

以超完备非正交归一态内积为矩阵元组成矩阵

$$
S = \left(\left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,T\,(T''\,\beta'') \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,T\,(T'\,\beta') \end{matrix} \right\rangle \right).
$$

S 的秩即是 $so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d$ 约化的重复度. 用 Schmidt 方法将 S 对角化，并用重复度控制对角化过程，即可求出 D 本征值为 ϵ 的正交归一态，从而得到在正交归一态下约化矩阵元.

对给定的不可约表示 $(\hat{\epsilon}\,t)$, 从最高权态开始递推，原则上可以求出任何不可约表示. 例如对不可约表示 (1 1/2), 不存在附加量子数问题，且只有下约化矩阵元不为零，即

$$
\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) \\ -1\ 1/2 \end{matrix} \middle\| P^{\dagger} \middle\| \begin{matrix} (1\ 1/2) \\ 1\ 1/2 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) \\ 1\ 1/2 \end{matrix} \middle\| \tilde{P} \middle\| \begin{matrix} (1\ 1/2) \\ -1\ 1/2 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{3},
$$

其中态是已经归一化的，所以不可约表示 (1 1/2) 的表示空间基为 $(\epsilon, T, M_t) = (1,1/2,1/2), (1,1/2,-1/2), (-1,1/2,1/2)$, 和 $(-1,1/2, -1/2)$.

但由于实际计算太繁复，至今只得到部分不可约表示的解析表达式．在附录 Ⅱ 中，将给出不可约表示 $(\hat{\epsilon}\ t)$, $t = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2$, 和 $\hat{\epsilon} = 2t, 2t+2$ 时的解析表达式.

现讨论在李代数链 $so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d$ 下， $so(5)_t$ 的约化系数．设 $(\hat{\epsilon}_1\ t_1)$, $(\hat{\epsilon}_2\ t_2)$ 为 $so(5)_t$ 的两个不可约表示，其表示空间的基分别为 $\left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_1\ t_1) \\ \epsilon_1\ T_1\ \beta_1\ M_{t1} \end{matrix} \right\rangle$ 和 $\left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_2\ t_2) \\ \epsilon_2\ T_2\ \beta_2\ M_{t2} \end{matrix} \right\rangle$. 其直积为

$$(\hat{\epsilon}_1\ t_1) \otimes (\hat{\epsilon}_2\ t_2) = \quad \oplus_{\hat{\epsilon},t}\, m_{(\hat{\epsilon}\ t)} (\hat{\epsilon}\ t). \tag{6.128}$$

直积约化一般不是简单的， $m_{(\hat{\epsilon}\ t)}$ 是不可约表示 $(\hat{\epsilon}\ t)$ 的重复度. $(\hat{\epsilon}, t)$ 表示空间的基可以写成

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} \gamma\ (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ T\ \beta\ M_t \end{matrix} \right\rangle = & \sum_{\epsilon_1, T_1, \beta_1, \epsilon_2, T_2, \beta_2} \left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_1\ t_1) & (\hat{\epsilon}_2\ t_2) \\ \epsilon_1\ T_1\ \beta_1 & \epsilon_2\ T_2\ \beta_2 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \gamma\ (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ T\ \beta \end{matrix} \right\rangle \\ & \times \left[\sum_{M_{t1}, M_{t2}} \langle T_1\ M_{t1}\ T_2\ M_{t2} | T\ M_t \rangle \left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_1\ t_1) \\ \epsilon_1\ T_1\ \beta_1\ M_{t1} \end{matrix} \right\rangle \right. \\ & \left. \times \left| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_2\ t_2) \\ \epsilon_2\ T_2\ \beta_2\ M_{t2} \end{matrix} \right\rangle \right], \end{aligned} \tag{6.129}$$

其中 $\langle T_1\ M_{t1}\ T_2\ M_{t2} | T\ M_t \rangle$ 是 $su(2)_t$ 的 CG 系数，γ 是反映直积非简单约化的附加量子数， $\gamma = 1, \cdots, m_{(\hat{\epsilon}\ t)}$. $so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d$ 的约化系数满足以下选择定则

$$\left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_1\ t_1) & (\hat{\epsilon}_2\ t_2) \\ \epsilon_1\ T_1\ \beta_1 & \epsilon_2\ T_2\ \beta_2 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \gamma\ (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ T\ \beta \end{matrix} \right\rangle = 0,$$

$$\text{若}\epsilon \neq \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \text{或}T \neq |T_1 - T_2|, |T_1 - T_2| + 1, \cdots, T_1 + T_2, \tag{6.130}$$

且满足以下正交归一关系:

$$\sum_{\epsilon_1,T_1,\beta_1,\epsilon_2,T_2,\beta_2}\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1) & (\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_1\, T_1\, \beta_1 & \epsilon_2\, T_2\, \beta_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma'\,(\hat{\epsilon}'\, t')\\ \epsilon'\, T\, \beta'\end{matrix}\right\rangle \times\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1) & (\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_1\, T_1\, \beta_1 & \epsilon_2\, T_2\, \beta_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma\,(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\end{matrix}\right\rangle = \delta_{\gamma'\,\gamma}\delta_{\hat{\epsilon}'\,\hat{\epsilon}}\delta_{t'\,t}\delta_{\epsilon'\,\epsilon}\delta_{\beta'\,\beta},$$

$$\sum_{\gamma,\hat{\epsilon},t,\epsilon,\beta}\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1) & (\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_1'\, T_1'\, \beta_1' & \epsilon_2'\, T_2'\, \beta_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma\,(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\end{matrix}\right\rangle \times\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1) & (\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_1\, T_1\, \beta_1 & \epsilon_2\, T_2\, \beta_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma\,(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\end{matrix}\right\rangle = \delta_{\epsilon_1'\,\epsilon_1}\delta_{T_1'\,T_1}\delta_{\beta_1'\,\beta_1}\delta_{\epsilon_2'\,\epsilon_2}\delta_{T_2'\,T_2}\delta_{\beta_2'\,\beta_2}. \tag{6.131}$$

约化系数满足下递推关系

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta}\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1) & (\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_1\, T_1\, \beta_1 & \epsilon_2\, T_2\, \beta_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma\,(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\end{matrix}\right\rangle\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon\, T\, \beta\end{matrix}\middle\|P^{\dagger}\middle\|\begin{matrix}(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon{+}2\, T'\, \beta'\end{matrix}\right\rangle\\
&=\sum_{T_1',\beta_1'}(-)^{1+T_1'+T_2+T}\sqrt{(2T_1+1)(2T'+1)}\begin{Bmatrix}1 & T_1 & T_1'\\ T_2 & T' & T\end{Bmatrix}\\
&\quad\times\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1) & (\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_1{+}2\, T_1'\, \beta_1' & \epsilon_2\, T_2\, \beta_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma\,(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon{+}2\, T'\, \beta'\end{matrix}\right\rangle\\
&\quad\times\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1)\\ \epsilon_1\, T_1\, \beta_1\end{matrix}\middle\|P^{\dagger}\middle\|\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1)\\ \epsilon_1{+}2\, T_1'\, \beta_1'\end{matrix}\right\rangle\\
&\quad+\sum_{T_2',\beta_2'}(-)^{1+T_1+T_2+T'}\sqrt{(2T_2+1)(2T'+1)}\begin{Bmatrix}1 & T_2 & T_2'\\ T_1 & T' & T\end{Bmatrix}\\
&\quad\times\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_1\, t_1) & (\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_1\, T_1\, \beta_1 & \epsilon_2{+}2\, T_2'\, \beta_2'\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\gamma\,(\hat{\epsilon}\, t)\\ \epsilon{+}2\, T'\, \beta'\end{matrix}\right\rangle\\
&\quad\times\left\langle\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_2\, T_2\, \beta_2\end{matrix}\middle\|P^{\dagger}\middle\|\begin{matrix}(\hat{\epsilon}_2\, t_2)\\ \epsilon_2{+}2\, T_2'\, \beta_2'\end{matrix}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{6.132}$$

这是从 ϵ 大递推到 ϵ 小的递推关系. 当 $(\hat{\epsilon}_1\, t_1)\otimes(\hat{\epsilon}_2\, t_2)$ 不是简单约

化时，递推关系 (6.132) 不能完全确定约化系数．所幸在 CFP 系数计算中，只用到不可约表示 (1 1/2) 与其他不可约表示直积，这是简单约化的，式 (6.132) 足以确定约化系数的绝对值．因此在适当选择相因子后，可以得到所需的约化系数．在附录 Ⅲ 中将给出 (1 1/2) 与 $(\hat{\epsilon}\, t)$ 直积，当 $t=0,1/2,1,3/2,2$, 及与 $(2t\ t)$, $(2t{+}2\ t)$ 直积的约化系数．

6.5.3 李代数链的约化

取 $a_0 = \max(0, n-N)$, max 表宗量中较大者， $[n/2]$ 是 $n/2$ 的整数部分，且 $n=2a+b$, 则 $u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_t$ 的约化为

$$[1^n] = \oplus_{a_0}^{[n/2]} [2^a 1^b] \otimes (b/2). \tag{6.133}$$

即与 L-S 耦合时 $u(2N) \supset u(N) \otimes su(2)_s$ 的约化 (6.84) 式一样．

$u(N) \supset sp(N)$ 全反对称表示 $[1^b]$ 的约化由 (6.23) 给出，而表示 $[2^a 1^b]$ 一般不是简单约化的．利用 $sp(N)$ 不可约表示的直积

$$\begin{aligned}
(1^c) \otimes (1^a) &= \oplus_{l=0}^{\hat{l}} \oplus_{i=l}^{a} (2^{a-i} 1^{c-a+2l}), \qquad c \geq a, \\
k &= \max(N/2-c,\ 0), \quad \hat{l} = \min(k, a),
\end{aligned} \tag{6.134}$$

其中 min 表示取宗量中较小值．可以得到 $u(N) \supset sp(N)$ 约化递推公式

$$\begin{aligned}
&[2^a 1^b] = [2^{a-2} 1^b] \oplus \sum_{\alpha} \sum_{\check{\beta}}^{\hat{\beta}} (2^{\beta} 1^{\alpha}), \\
&\qquad c = \min(a+b,\ N+1-a-b), \\
&\check{\beta} = \max(0,\ a-\alpha), \qquad \hat{\beta} = \min(a,\ c-\alpha), \\
&\qquad \text{当} b = \text{偶时}，\ \alpha = 0, 2, \cdots, \leq c, \\
&\qquad \text{当} b = \text{奇时}，\ \alpha = 1, 3, \cdots, \leq c.
\end{aligned} \tag{6.135}$$

递推初值为

$$
[1^b] = \begin{cases} (1^b) \oplus (1^{b-2}) \oplus \cdots (0), & b = \text{偶}, \\ (1^b) \oplus (1^{b-2}) \oplus \cdots (1), & b = \text{奇}, \end{cases}
$$

$$
[21^b] = \begin{cases} (21^b) \oplus (1^b) \oplus (21^{b-2}) \oplus (1^{b-2}) \oplus \cdots \oplus (1^2) \oplus (2), \\ \qquad b = \text{偶} \le N/2, \\ (21^b) \oplus (1^b) \oplus (21^{b-2}) \oplus (1^{b-2}) \oplus \cdots \oplus (21) \oplus (1), \\ \qquad b = \text{奇} \le N/2, \\ (1^b) \oplus (21^{b-2}) \oplus (1^{b-2}) \oplus \cdots (1^2) \oplus (2), \\ \qquad b = N/2 = \text{偶}, \\ (1^b) \oplus (21^{b-2}) \oplus (1^{b-2}) \oplus \cdots (1^3) \oplus (21) \oplus (1), \\ \qquad b = N/2 = \text{奇}, \\ (1^{b-2i}) \oplus (21^{b-2(i+1)}) \oplus (1^{b-2(i+1)}) \oplus \cdots \oplus (1^2) \oplus (2), \\ \qquad b = N/2 + i = \text{偶}, \\ (1^{b-2i}) \oplus (21^{b-2(i+1)}) \oplus (1^{b-2(i+1)}) \oplus \cdots \oplus (1), \\ \qquad b = N/2 + i = \text{奇}. \end{cases}
\tag{6.136}
$$

用此初值和递推关系 (6.135), 可求出所要的 $u(n) \supset sp(N)$ 约化.

只要再求出 $sp(N) \supset so(3)$ 的约化, 则求出了波函数所需的全部约化规则. 用 (6.134) 式可得

$$
\begin{aligned}(2^a1^b) = & (1^{a+b}) \otimes (1^a) \oplus (1^{a+b}) \otimes (1^{a-2}) \\ & \ominus (1^{a+b+1}) \otimes (1^{a-1}) \ominus (1^{a+b-1}) \otimes (1^{a-1}).\end{aligned}
\tag{6.137}
$$

已知 $sp(N)$ 的不可约表示 (1^a) 含角动量 J 的重复度 $\gamma(a, J)$ 由式 (6.28) 给出. 直积 $(1^a) \otimes (1^b)$ 含角动量 J 的重复度为

$$\omega(1^a,1^b,J)=\sum_{J_2=\check{J}_2}^{\hat{J}_2}\gamma(b,J_2)\sum_{J_1=|J-J_2|}^{J+J_2}\gamma(a,J_1),$$

$$\text{当}b=\text{偶},\ \check{J}_2=0,$$

$$\text{当}b=\text{奇},\ \check{J}_2=1/2,\quad \hat{J}_2=b(N-b)/2. \tag{6.138a}$$

由 (6.137) 得 $sp(N)$ 不可约表示 (2^a1^b) 含角动量 J 的重复度为

$$\chi(2^a1^b,J)=\omega(1^{a+b},1^a,J)+\omega(1^{a+b},1^{a-2},J)$$
$$-\omega(1^{a+b+1},1^{a-1},J)-\omega(1^{a+b-1},1^{a-1},J). \tag{6.138b}$$

这给出了李代数链中所有的约化规则. 文献 [28] 中有部分结果.

6.5.4 CFP系数的因子化

通过直接做 $a^\dagger_{m\,m_t},\tilde{a}_{m\,m_t}$ 与表 6.8 给出的各李代数生成元间对易关系, 可以证明产生和湮没算符是各李代数的不可约张量, 其秩由表 6.9 给出. $a^\dagger_{m\,m_t}$ 还是 $u(2N)$ 和 $u(N)$ 的 [1] 秩不可约张量. $\tilde{a}_{m\,m_t}$ 不是 $u(2N)$ 和 $u(N)$ 的不可约张量, 而是除去粒子数算符之后的 $su(2N)$ 和 $su(N)$ 的 $[1^{2N-1}]$ 和 $[1^{N-1}]$ 秩不可约张量. 除表 6.9 之外, $a^\dagger_{m\,1/2},a^\dagger_{m\,-1/2}$, $-\tilde{a}_{m\,1/2}$ 和 $-\tilde{a}_{m\,-1/2}$ 还构成 $so(5)_t$ 的 (1 1/2) 秩不可约张量, 分别对应于 $(-1,1/2,1/2)$, $(-1,1/2,-1/2)$, $(1,1/2,1/2)$ 和 $(1,1/2,-1/2)$ 分量. 产生和湮没算符的不可约张量性质, 对 CFP 系数的因子化, 具有重要作用.

表 6.9 产生和湮没算符作为不可约张量的秩

	$su(2N)$	$su(N)$	$su(2)_t$	$sp(N)$	$so(3)$
$a^\dagger_{m\,m_s}$	[1]	[1]	1/2	(1)	j
$\tilde{a}_{m\,m_s}$	$[1^{2N-1}]$	$[1^{N-1}]$	1/2	(1)	j

由产生算符的不可约张量性质, 利用 Wigner-Eckart 定理和半

单紧致李代数的完全可约性，有

$$\begin{aligned}
&\langle n\,\beta\,(s\,t)\alpha\,J\,T\|a^{\dagger}\|n-1\,\beta_1\,(s_1\,t_1)\,\alpha_1\,J_1\,T_1\rangle_{so(3)\times su(2)_t}\\
&=\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [1^{n-1}] & [1^n]\\ [1\,1/2] & [n-1\,T_1] & [n\,T]\end{array}\right\rangle\\
&\quad\times\left\langle\begin{array}{cc|c}[1\,1/2] & [n-1\,T_1] & [n\,T]\\ (1\,1/2) & \beta_1\,(s_1\,t_1) & \beta\,(s\,t)\end{array}\right\rangle\\
&\quad\times\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,1/2) & (s_1\,t_1) & (s\,t)\\ j & \alpha_1\,J_1 & \alpha\,J\end{array}\right\rangle\langle n\|a^{\dagger}\|n-1\rangle_{u(2N)},
\end{aligned}\tag{6.139}$$

其中 $u(N)$ 和 $sp(N)$ 的不可约表示分别用 $[n\,T]$ 和 $(s\,t)$ 标记.
$\left\langle\begin{array}{cc|c}[1\,1/2] & [n-1\,T_1] & [n\,T]\\ (1\,1/2) & \beta_1\,(s_1\,t_1) & \beta\,(s\,t)\end{array}\right\rangle$ 和 $\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,1/2) & (s_1\,t_1) & (s\,t)\\ j & \alpha_1\,J_1 & \alpha\,J\end{array}\right\rangle$
分别为 $u(N)\supset sp(N)$ 和 $sp(N)\supset so(3)$ 的约化系数.
$\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [1^{n-1}] & [1^n]\\ [1\,1/2] & [n-1\,T_1] & [n\,T]\end{array}\right\rangle$ 是 $u(2N)\supset u(N)\otimes su(2)_t$ 的约化系数，也可写成 $\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [1^{n-1}] & [1^n]\\ [1]\otimes[1] & [\lambda_1]\otimes[\tilde{\lambda}_1] & [\lambda]\otimes[\tilde{\lambda}]\end{array}\right\rangle$，不同标记间有 $[\lambda]=[2^{n/2-T}1^{2T}]$, $[\tilde{\lambda}]=[n/2+T\ \ n/2-T]$, $[\lambda_1]=[2^{(n-1)/2-T_1}1^{2T_1}]$, $[\tilde{\lambda}_1]=[(n-1)/2+T_1\ \ (n-1)/2-T_1]$. 其值由 (6.92) 给出，即

$$\left\langle\begin{array}{cc|c}[1] & [1^{n-1}] & [1^n]\\ [1\,1/2] & [n-1\,T_1] & [n\,T]\end{array}\right\rangle=c(n,T,T_1).\tag{6.92$'$}$$

采用与单角动量费密子同样方法，可以算出产生算符的 $u(2N)$ 约化矩阵元，

$$\langle n\|a^{\dagger}\|n-1\rangle_{u(2N)}=\sqrt{n}.\tag{6.140}$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
&\langle n\,\beta\,(s\,t)\,\alpha\,J\,T\|a^\dagger\|n-1\,\beta_1\,(s_1\,t_1)\,\alpha_1\,J_1\,T_1\rangle_{so(3)\otimes su(2)_t}\\
&=\sqrt{n}c(n,T,T_1)\left\langle\begin{array}{cc|c}[1\,1/2] & [n-1\,T_1] & [n\,T]\\ (1\,1/2) & \beta_1\,(s_1\,t_1) & \beta\,(s\,t)\end{array}\right\rangle\\
&\quad\times\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,1/2) & (s_1\,t_1) & (s\,t)\\ j & \alpha_1\,J_1 & \alpha\,J\end{array}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{6.141}
$$

先证明 $sp(N)\supset so(3)$ 约化系数的倒易律. 利用产生和湮没算符均为 $sp(N)$ 的不可约张量及它们的关系, 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,1/2) & (s\,t) & (s-1\,t_1)\\ j & \alpha\,J & \alpha_1\,J_1\end{array}\right\rangle\langle s-1\,(s-1\,t_1)\,t_1\|\tilde{a}\|s\,(s\,t)\,t\rangle_{sp(N)}\\
&=(-)^{j-J_1+J+1/2-t_1+t}\sqrt{\frac{(2J+1)(2t+1)}{(2J_1+1)(2t_1+1)}}\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,1/2) & (s-1\,t_1) & (s\,t)\\ j & \alpha_1\,J_1 & \alpha\,J\end{array}\right\rangle\\
&\quad\times\langle s\,(s\,t)\,t\|a^\dagger\|s-1\,(s-1\,t_1)\rangle_{sp(N)}.
\end{aligned}
$$

两边取绝对值平方, 并对 α,J,α_1,J_1 求和, 选取相因子使约化矩阵元为实, 可得

$$
\begin{aligned}
&\langle s\,(s\,t)\,t\|a^\dagger\|s-1\,(s-1\,t_1)\rangle_{sp(N)}\\
&=\sqrt{\frac{(2t_1+1)\dim(s-1\,t_1)}{(2t+1)\dim(s\,t)}}\langle s-1\,(s-1\,t_1)\,t_1\|\,\tilde{a}\,\|s\,(s\,t)\,t\rangle_{sp(N)}.
\end{aligned}
$$

于是得倒易律为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,1/2) & (s\,t) & (s-1\,t_1)\\ j & \alpha\,J & \alpha_1\,J_1\end{array}\right\rangle=(-)^{j-J_1+J+1/2-t_1+t}\\
&\times\sqrt{\frac{(2J+1)\dim(s-1\,t_1)}{(2J_1+1)\dim(s\,t)}}\left\langle\begin{array}{cc|c}(1\,1/2) & (s-1\,t_1) & (s\,t)\\ j & \alpha_1\,J_1 & \alpha\,J\end{array}\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{6.142}
$$

其中 $sp(N)$ 不可约表示 $(s\,t)$ 的维数 $\dim(s\,t)$ 为

$$\dim(s\,t) = (N+3)!(N+1)! \times \frac{(2t+1)(N+3-s)(N+4-s+2t)(N+4-s-2t)}{(N+4-s/2+t)!(N+3-s/2-t)!(s/2-t)!(s/2+t+1)!}. \tag{6.143}$$

再证明 $so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d$ 约化系数的倒易律. 利用产生和湮没算符为 $sp(N)$ 和 $so(5)_t$ 不可约张量的性质, 取相因子使约化矩阵元为实, 可得

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (s\,t) \\ j & \alpha\,J \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (s_1\,t_1) \\ \alpha_1\,J_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat{\epsilon}\,t) \\ 1\,1/2 & \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_1\,t_1) \\ \epsilon+1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \langle (s_1\,t_1) \| a \| (s\,t) \rangle_{sp(N)\otimes so(5)_t} \\
&= (-)^{j+J-J_1+1/2+T-T_1} \sqrt{\frac{(2J+1)(2T+1)}{(2J_1+1)(2T_1+1)}} \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (s_1\,t_1) \\ j & \alpha_1\,J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (s\,t) \\ \alpha\,J \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat{\epsilon}_1\,t_1) \\ -1\,1/2 & \epsilon+1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \right\rangle \\
&\quad \times \langle (s\,t) \| a \| (s_1\,t_1) \rangle_{sp(N)\otimes so(5)_t}.
\end{aligned}$$

代入 $sp(n) \supset so(3)$ 倒易律, 并取 $s_1 = s-1$, 即 $\hat{\epsilon}_1 = \hat{\epsilon}+1$, 得

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat{\epsilon}+1\,t_1) \\ -1\,1/2 & \epsilon+1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \right\rangle \\
&= (-)^{t-t_1-T+T_1} \sqrt{\frac{(2T_1+1)\dim(s-1\,t_1)}{(2T+1)\dim(s\,t)}} \\
&\quad \times \frac{\langle (s-1\,t_1) \| a \| (s\,t) \rangle_{sp(N)\otimes so(5)_t}}{\langle (s\,t) \| a \| (s-1\,t_1) \rangle_{sp(N)\otimes so(5)_t}} \\
&\quad \times \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat{\epsilon}\,t) \\ 1\,1/2 & \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}+1\,t_1) \\ \epsilon+1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

取 $n=s$, 即 $\hat{\epsilon}=\epsilon, T=t, T_1=t_1$, 注意

$$\left\langle \begin{array}{cc} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}\ t) \\ 1\ 1/2 & \hat{\epsilon}\ t \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ \hat{\epsilon}+1\ t_1 \end{array} \right\rangle = 1.$$

可得 $sp(N)\otimes so(5)_t$ 约化矩阵元之比为

$$\frac{\langle (s-1\ t_1)\|a\|(s\ t)\rangle_{sp(N)\otimes so(5)_t}}{\langle (s\ t)\|a\|(s-1\ t_1)\rangle_{sp(N)\otimes so(5)_t}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2t+1)\mathrm{dim}(s\ t)}{(2t_1+1)\mathrm{dim}(s-1\ t_1)}} \left\langle \begin{array}{cc} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ -1\ 1/2 & \hat{\epsilon}+1\ t_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}\ t \end{array} \right\rangle,$$

其中约化系数

$$\left\langle \begin{array}{cc} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ -1\ 1/2 & \hat{\epsilon}+1\ t_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}\ t \end{array} \right\rangle$$
$$= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(\hat{\epsilon}+3)(\hat{\epsilon}+1-2t_1)}{(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}+3-2t_1)}}, & t=t_1+1/2, \\ \sqrt{\dfrac{t_1(\hat{\epsilon}+3)(\hat{\epsilon}+3+2t_1)}{(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}+5+2t_1)}}, & t=t_1-1/2, \end{cases} \qquad (6.144)$$

于是得 $so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d$ 约化系数倒易律

$$\left\langle \begin{array}{cc} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ -1\ 1/2 & \epsilon+1\ \beta_1\ T_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ \beta\ T \end{array} \right\rangle$$
$$= (-)^{t-t_1-T+T_1} \sqrt{\frac{(2t+1)(2T_1+1)}{(2t_1+1)(2T+1)}} \left\langle \begin{array}{cc} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ -1\ 1/2 & \hat{\epsilon}+1\ t_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}\ t \end{array} \right\rangle$$
$$\times \left\langle \begin{array}{cc} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}\ t) \\ 1\ 1/2 & \epsilon\ \beta\ T \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ \epsilon+1\ \beta_1\ T_1 \end{array} \right\rangle. \qquad (6.145a)$$

取 $s_1=s+1$, $\hat{\epsilon}_1=\hat{\epsilon}-1$, 可得另一个 $so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d$ 约化

系数倒易律

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat\epsilon\, t) \\ 1\,1/2 & \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon{-}1\, t_1) \\ \epsilon{+}1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= (-)^{t_1-t+T-T_1}\sqrt{\frac{(2t_1+1)(2T+1)}{(2t+1)(2T_1+1)}} \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat\epsilon\, t) \\ -1\,1/2 & \hat\epsilon\, t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon-1\, t_1) \\ \hat\epsilon-1\, t_1 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat\epsilon{-}1\, t_1) \\ -1\,1/2 & \epsilon{+}1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon\, t) \\ \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \right\rangle. \tag{6.145b}$$

以下用准自旋代数 $so(5)_t$ 的不可约表示及 CG 系数计算 $u(n) \supset sp(N)$ 约化系数. 用 (6.120) 知

$$\langle n\,\beta\,(s\,t)\,\alpha\,J\,M\,T\,M_t|a^\dagger_{m\,m_t}|n-1\,\beta_1\,(s_1\,t_1)\,\alpha_1\,J_1\,M_1\,T_1\,M_{t1}\rangle$$

$$= \left\langle \begin{matrix} (\hat\epsilon\, t) \\ \epsilon\,\beta\,T\,M_t(\alpha\,J\,M) \end{matrix} \middle| a^\dagger_{m\,m_t} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon_1\, t_1) \\ \epsilon{+}1\,\beta_1\,T_1\,M_{t1}\,(\alpha_1\,J_1\,M_1) \end{matrix} \right\rangle,$$

其中 $\hat\epsilon = N - s$, $\hat\epsilon_1 = N - s_1$, $\epsilon = N - n$. 利用产生算符是 $so(5)_t$ 的 $(1\,1/2)$ 秩不可约张量算符，可得

$$\left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat\epsilon_1\, t_1) \\ -1\,1/2 & \epsilon+1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon\, t) \\ \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} (\hat\epsilon\, t) \\ (\alpha\,J\,M) \end{matrix} \middle\| a \middle\| \begin{matrix} (\hat\epsilon_1\, t_1) \\ (\alpha_1\,J_1\,M_1) \end{matrix} \right\rangle_{so(5)_t}$$

$$= \sqrt{n}c(n,T,T_1)\langle j\,m\,J_1\,M_1|J\,M\rangle \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (s_1\,t_1) \\ j & \alpha_1\,J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (s\,t) \\ \alpha\,J \end{matrix} \right\rangle$$

$$\times \left\langle \begin{matrix} [1] & [2^{(n-1)/2-T_1}1^{2T_1}] \\ (1\,1/2) & \beta_1(s_1\,t_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [2^{n/2-T}1^{2T}] \\ \beta(s\,t) \end{matrix} \right\rangle.$$

注意 $so(5)_t$ 约化矩阵元与 $\epsilon,\beta,T,\beta_1,T_1$ 等量子数无关，取 $n =$

s, $T=t$, $s_1=s-1$, $T_1=t_1$, 最高权态约化系数满足

$$\left\langle \begin{matrix} [1] & [2^{(n-1)/2-T_1}1^{2T_1}] \\ (1\ 1/2) & (n-1\ T_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [2^{n/2-T}1^{2T}] \\ (n\ T) \end{matrix} \right\rangle = 1.$$

得 $so(5)_t$ 约化矩阵元为

$$\left\langle \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ t) \\ (\alpha\ J\ M) \end{matrix} \middle\| a \middle\| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}_1\ t_1) \\ (\alpha_1\ J_1\ M_1) \end{matrix} \right\rangle_{so(5)_t}$$

$$= \sqrt{s}c(s,t,t_1)\langle j\ m\ J_1\ M_1|J\ M\rangle \frac{\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (s{-}1\ t_1) \\ j & \alpha_1\ J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (s\ t) \\ \alpha\ J \end{matrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}{+}1\ t_1) \\ -1\ 1/2 & \hat{\epsilon}{+}1\ t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}\ t \end{matrix} \right\rangle}.$$

于是得 $u(N)\supset sp(N)$ 约化系数

$$\left\langle \begin{matrix} [1] & [2^{(n-1)/2-T_1}1^{2T_1}] \\ (1\ 1/2) & \beta_1(s-1\ t_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [2^{n/2-T}1^{2T}] \\ \beta(s\ t) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{s}{n}} \frac{c(s,t,t_1)\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ -1\ 1/2 & \epsilon+1\ \beta_1\ T_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ \beta\ T \end{matrix} \right\rangle}{c(n,T,T_1)\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ t_1) \\ -1\ 1/2 & \hat{\epsilon}+1\ t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}\ t \end{matrix} \right\rangle}. \quad (6.146a)$$

同理利用 $-\tilde{a}_{m\ m_t}$ 是 $so(5)_t$ 秩为 $(1\ 1/2)$ 不可约张量的另一分量，可得

$$\left\langle \begin{matrix} [1] & [2^{(n-1)/2-T_1}1^{2T_1}] \\ (1\ 1/2) & \beta_1(s+1\ t_1) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [2^{n/2-T}1^{2T}] \\ \beta(s\ t) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= -\sqrt{\frac{(s+1)(2t_1+1)\dim(s+1\ t_1)}{n(2t+1)\dim(s\ t)}}$$

$$
\times \frac{c(s+1,t_1,t)\left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat{\epsilon}-1\,t_1) \\ -1\,1/2 & \epsilon+1\,\beta_1\,T_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \epsilon\,\beta\,T \end{matrix} \right\rangle}{c(n,T,T_1)\left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat{\epsilon}-1\,t_1) \\ 1\,1/2 & \hat{\epsilon}-1\,t_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\,t) \\ \hat{\epsilon}\,t \end{matrix} \right\rangle}. \tag{6.146b}
$$

由 (6.146), 利用 (6.144),(6.145) 从 $so(5)_t \supset su(2)_t \otimes u(1)_d$ 的约化系数，即可得 $u(N) \supset sp(N)$ 的约化系数. 所以只需再求出 $sp(N) \supset so(3)$ 的约化系数，便求得了 CFP 系数.

6.5.5 $sp(N) \supset so(3)$ 约化系数的递推公式

$sp(N) \supset so(3)$ 约化系数尚无解析公式，只能用递推公式求出. 由 $sp(N) \supset so(3)$ 约化系数的倒易律知，只需求出下约化矩阵元即可得全部约化系数,

$$
\begin{aligned}
&\langle s\ (s\ t)\ \alpha\ J\ t \| a^\dagger \| s-1\ (s-1\ t_1)\ \alpha_1\ J_1\ t_1 \rangle_{so(3)\otimes su(2)_t} \\
&= \sqrt{s} c(s,t,t_1) \left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (s-1\,t_1) \\ j & \alpha_1\,J_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (s\,t) \\ \alpha\,J \end{matrix} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{6.147}
$$

设辛弱数小于 s 的态已知，则由角动量耦合从辛弱数为 $s-1$ 的态，可以得到 s 个粒子具有角动量及投影为 J,M 同位旋及投影为 t,M_t 的态,

$$
\begin{aligned}
&|\Psi(s\ [\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ M\ t\ M_t)\rangle = [a^\dagger |s-1\ (s-1\ t_1')\ \alpha_1'\ J_1'\ t_1'\rangle]^{J\,t}_{M\,M_t} \\
&= \sum_{m\ M_1'\ m_t\ M_{t_1}} \langle j\ m\ J_1'\ M_1' | J\ M\rangle \langle 1/2\ m_t\ t_1'\ M_{t_1}' | t\ M_t\rangle \\
&\quad \times a^\dagger_{m\ m_t} |s-1\ (s-1\ t_1')\ \alpha_1'\ J_1'\ M_1'\ t_1'\ M_{t_1}'\rangle .
\end{aligned} \tag{6.148}
$$

$|\Psi(s\ [\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ M\ t\ M_t)\rangle$ 中附加量子数用 $[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']$ 标记，也就是用 Ψ 的母态来标记. Ψ 态包含辛弱数为 s 和 $s-2$ 的态. 辛弱数为 $s-2$ 的态可以用已知的态 $|s\ (s-2\ t_2)\ \alpha_2\ J\ M\ t\ M_t\rangle$ 来展开,

于是

$$
\begin{aligned}
&|\Psi(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ M\ t\ M_t)\rangle \\
&\quad = A(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ t)|s\,(s\ t)\ [\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ M\ t\ M_t\rangle \\
&\qquad + \sum_{\alpha_2, t_2} B(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\alpha_2\ J\ t_2\ t)|s\,(s-2\,t_2)\ \alpha_2\ J\ M\ t\ M_t\rangle.
\end{aligned}
$$

s 个全不成对的粒子态为

$$
\begin{aligned}
&|s\ (s\ t)\ [\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ M\ t\ M_t\rangle \\
&\quad = \frac{1}{A(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ t)}\Big\{\{|\Psi(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ J\ M\ t\ M_t)\rangle \\
&\qquad - \sum_{\alpha_2, t_2} B(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ \alpha_2\ J\ t_2\ t)|s\,(s-2\,t_2)\ \alpha_2\ J\ M\ t\ M_t\rangle\Big\}.
\end{aligned}
\tag{6.149}
$$

由于已知态 $|s\,(s-2\,t_2)\ \alpha_2\ J\ M\ t\ M_t\rangle$ 是正交归一的，不同辛弱数的态是正交的，所以

$$
\begin{aligned}
&B(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\alpha_2\ J\ t_2\ t) \\
&\quad = \langle s\,(s-2\,t_2)\ \alpha_2\ J\ t\|a^\dagger\|s-1\ (s-1\ t_1')\ \alpha_1'\ J_1'\ t_1'\rangle = (-)^{j+J_1'-J+t_2+t} \\
&\qquad \times \sqrt{\frac{6(2J_1'+1)(2t_1'+1)}{(2J+1)[N+4-s+t_2(t_2+1)-t(t+1)]}}\begin{Bmatrix} t_2 & 1/2 & t_1' \\ 1/2 & t & 1 \end{Bmatrix} \\
&\qquad \times \langle s-1\ (s-1\ t_1')\ \alpha_1'\ J_1'\ t_1'\|a^\dagger\|s-2\ (s-2\,t_2)\ \alpha_2\ J\ t_2\rangle.
\end{aligned}
\tag{6.150}
$$

取

$$
\begin{aligned}
&R(s\,[\alpha_1'\ J_1'\ t_1']\ \alpha_1\ J_1\ t_1\ J\ t) = \delta_{\alpha_1'\,\alpha_1}\delta_{J_1'\,J_1}\delta_{t_1'\,t} \\
&\quad - (-)^{J_1+J_1'+t_1+t_1'}\sqrt{(2J_1'+1)(2J_1+1)(2t_1'+1)(2t_1+1)} \\
&\quad \times \sum_{\alpha_2\ J_2\ t_2}\left[\begin{Bmatrix} j & J_2 & J_1' \\ j & J & J_1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1/2 & t_2 & t_1' \\ 1/2 & t & t_1 \end{Bmatrix}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{6(-)^{2J_1-t_1-t_1'}\delta_{J\,J_2}}{(2J+1)[N+4-s+t_2(t_2+1)-t(t+1)]}$$
$$\times\begin{Bmatrix} t_2 & 1/2 & t_1 \\ 1/2 & t & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} t_2 & 1/2 & t_1' \\ 1/2 & t & 1 \end{Bmatrix}\Bigg]$$
$$\times\langle s-1\,(s-1\,t_1')\,\alpha_1'\,J_1'\,t_1'\|a^\dagger\|s-2\,(s-2\,t_2)\,\alpha_2\,J_2\,t_2\rangle$$
$$\times\langle s-1\,(s-1\,t_1)\,\alpha_1\,J_1\,t_1\|a^\dagger\|s-2\,(s-2\,t_2)\,\alpha_2\,J_2\,t_2\rangle. \tag{6.151}$$

取 $A(s\,[\alpha_1'\,J_1'\,t_1']\,J\,t)$ 为正，则有

$$A(s\,[\alpha_1'\,J_1'\,t_1']\,J\,t)=\sqrt{R(s\,[\alpha_1'\,J_1'\,t_1']\,\alpha_1'\,J_1'\,t_1'\,J\,t)}, \tag{6.152}$$

$$\langle s\,(s\,t)\,[\alpha_1'\,J_1'\,t_1']\,J\,t\|a^\dagger\|s-1\,(s-1\,t_1)\,\alpha_1\,J_1\,t_1\rangle
=\frac{R(s\,[\alpha_1'\,J_1'\,t_1']\,\alpha_1\,J_1\,t_1\,J\,t)}{\sqrt{R(s\,[\alpha_1'\,J_1'\,t_1']\,\alpha_1'\,J_1'\,t_1'\,J\,t)}}. \tag{6.153}$$

(6.151)(6.152),(6.153) 给出含同位旋 CFP 的递推关系.

与单角动量费密子和 L-S 耦合费密子体系的 CFP 递推关系一样，这样得到的态是非正交和超完备的，必须从中选出一组正交归一完备态. 而且每递推一次，就要进行一次选取正交归一完备态手续，才能得到正确结果.

由本章各节的讨论可以看出，求转动不变的全同粒子体系波函数方法，对费密子或玻色子，对 j-j 耦合或 L-S 耦合等，有许多相似之处. 都是利用产生和湮没算符是李代数的不可约张量性质，根据半单紧致李代数表示的完全可约性和 Winger-Eckart 定理简化计算，来得到结果.

在原子核的区分质子中子相互作用玻色子模型中，需计算含 F 旋玻色子的 CFP 系数. 在文献 [23] 中，给出 F 旋最大和次大的 CFP 计算方法，并可利用文献 [6] 中程序进行具体计算.

参 考 文 献

[1] Bacher R F, Goudsmit S. Atomic energy relations I. Phys Rev, 1934, (46): 948

[2] Bayman B F, Lande A. Identical-particle fractional parentage. Nucl Phys,1966,(77): 1

[3] Flowers B H, Szpikowski S. A generalized quasispin formalism. Proc Phys Soc, 1964,(84): 193

[4] Han Q Z, Sun H Z, Wang J J. Irreducible representations of quasispin group $SO(5)$. Commu Theor Phys, 1993,(20): 201

[5] Han Q Z, Sun H Z, Wang J J. Coupling coefficients of quasispin group $SO(5)$. Commu Theor Phys, 1993,(20): 313

[6] Han Q Z, Hsieh S T, Chiang H C, et al. A Fortran program for the CFP's of a boson system with F spin. Comput Phys Commun, 1995,(85): 463

[7] Hecht K T. Five-dimensional quasispin: The n–T dependence of shell-model matrix element in the seniority scheme. Nucl Phys, 1967, (A102): 11

[8] Hecht K T, Elliott J P. Coherent-state theory for the proton-neutron quasispin group. Nucl Phys, 1985,(A438): 29

[9] Helmers K. Symplectic invariants and Flower's classification of shell model states. Nucl Phys, 1961,(23): 594

[10] Hemenger R, Hect K T. Five-dimensional quasispin toward a complete characteristics of shell-model state in the seniority scheme. Nucl Phys, 1970,(A145): 468

[11] Judd B R. Operator Techniques in Atomic Spectroscopy. New York: McGraw-Hill, 1963

[12] Judd B R. Second Quantization and Atomic Spectroscopy. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1967

[13] Liu Y X, Han Q Z, Wang J J. A new version of CFPSIB, Fractional parentage of an identical boson system. Comput Phys Commun, 1995,(85): 89

[14] Moshinsky M, Quesne C. Linear canonical transformations and their unitary representations. J Math Phys,(12): 1772

[15] Racah G. Theory of complex spectra. Phys Rev, 1943, (63): 367

[16] Remond P J. An explicit formular for the calculation of fractional parentage coefficient. Proc Roy Soc (London), (A222): 84

[17] de-Shalit A, Talmi I. Nuclear Shell Theory. New York, London: Academic Press,1963

[18] 孙洪洲. 原子核的四极振动波函数. 高能物理与核物理, 1980,(4): 478

[19] Sun H Z, Han Q Z, Zhang M, et al. A recurrent formula for fractional parentage coefficients of identical fermions. Commu Theor Phys,(11): 442

[20] Sun H Z, Zhang M, Han Q Z, et al. A new recurrsion relation of fractional parentage coefficients of identical bosons. J Phys, 1989,(A22): 4769

[21] Sun H Z, Han Q Z, Wang J J. Symmetries of fractional parentage coefficients with isospin. Commu Theor Phys, 1993,(19): 467

[22] Sun H Z, Han Q Z, Wang J J. Fractional parentage coefficients with explicit seniority and isospin. Commu Theor Phys, 1993,(20): 329

[23] Sun H Z, Han Q Z, Chiang H C, et al. Coefficients of fractional parentage of a boson system with F-spin. J Phys, 1995,(A28): 19

[24] Sun H Z, Han Q Z. A new recurrsion relation of fractional parentage coefficients in $L-S$ coupling case. Commu Theor Phys, 1997,(30): 295

[25] Szpikowski R, Berej W. A new physical basis for the irreducible representations of the orthogonal group $SO(5)$ in the quasispin formalism. J. Phys. **A23** (1990) 3409

[26] Talmi I. Simple Models of Complex Nuclei. Switzerland: Harwood Academic Publishers, 1993

[27] 王稼军, 孙洪洲. α 元划分及其应用. 高能物理与核物理, 1990,(14): 842

[28] 王稼军, 孙洪洲. $U(N) \supset Sp(N) \supset O(3)$ 的分支律. 高能物理与核物理, 1992,(18): 269

[29] Wang J J, Han Q Z, Liu Y X. A new Fortran program for CFP's of an identicaal fermion system. Comput Phys Commun, 1995,(85): 99

[30] Zwart D. RITSSCHIL, A new program for shell-model calculations. Comput Phys Commun, 1985(38): 365

附录I 单角动量 j 费密子的 $sp(2j+1)\supset o(3)$ 约化重复度

$sp(2j+1)$ 的不可约表示为 (1^{ν}), $o(3)$ 的不可约表示为 J, 重复度简记为 $\gamma=\gamma(\nu,J)$ 或将重复度记为 $(J)^{\gamma}$.

对任何单角动量 j, $\nu=1$ 只包含总角动量为 j 的态一次. $\nu=2$ 只包含总角动量为 $2,\cdots,2j-1$ 的态各一次. 下面给出 $\nu\geq 3$, $j=5/2,\cdots,15/2$ 的重复度.

$$j=\frac{5}{2}$$

$\nu=3$	J	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
	γ	1	1

$$j=\frac{7}{2}$$

$\nu=3$	J	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{15}{2}$
	γ	1	1	1	1	1
$\nu=4$	J	2	4	5	8	
	γ	1	1	1	1	

$$j=\frac{9}{2}$$

$\nu=3$	J	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{21}{2}$	
	γ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
$\nu=4$	J	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
	γ	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1
$\nu=5$	J	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{25}{2}$
	γ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$j = \frac{11}{2}$$

$\nu = 3$

J	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{27}{2}$
γ	1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1

$\nu = 4$

J	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
γ	1	2	1	3	2	3	2	3	2	2	1	2	1	1
J	16													
γ	1													

$\nu = 5$

J	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$
γ	1	1	2	3	2	3	3	3	3	3	2	2
J	$\frac{25}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{35}{2}$							
γ	2	1	1	1	1							

$\nu = 6$

J	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
γ	1	1	2	2	1	3	2	2	2	2	1	2	1	1
J	15	18												
γ	1	1												

$$j = \frac{13}{2}$$

$\nu = 3$

J	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{25}{2}$
γ	1	1	1	2	2	1	2	2	1	2	1	1
J	$\frac{27}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{33}{2}$									
γ	1	1	1									

$\nu = 4$

J	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
γ	1	3	1	4	3	4	3	5	3	4	3	3	2	3
J	15	16	17	18	20									
γ	1	2	1	1	1									

$\nu = 5$

J	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$
γ	1	2	4	4	5	5	6	6	6	6	6	5
J	$\frac{25}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{33}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{37}{2}$	$\frac{39}{2}$	$\frac{41}{2}$	$\frac{45}{2}$		
γ	5	4	4	3	2	2	2	1	1	1		

$\nu = 6$

J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
γ	2	1	3	4	6	4	8	6	7	7	7	5	7	5

J	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24
γ	5	4	4	2	3	2	1	1	1	1

$\nu = 7$

J	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$
γ	2	1	2	4	3	4	5	4	5	5	4	4

J	$\frac{25}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{33}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{37}{2}$	$\frac{39}{2}$	$\frac{41}{2}$	$\frac{43}{2}$	$\frac{49}{2}$
γ	5	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1

$$j = \frac{15}{2}$$

$\nu = 3$

J	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{25}{2}$
γ	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1

J	$\frac{27}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{33}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{39}{2}$
γ	2	1	1	1	1	1

$\nu = 4$

J	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
γ	2	3	2	5	3	6	4	6	5	6	4	6	4	4

J	15	16	17	18	19	20	21	22	24
γ	3	4	2	3	1	2	1	1	1

$\nu = 5$

J	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$
γ	2	3	5	7	7	9	9	10	10	11	10	10

J	$\frac{25}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{33}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{37}{2}$	$\frac{39}{2}$	$\frac{41}{2}$	$\frac{43}{2}$	$\frac{45}{2}$
γ	10	9	8	8	6	6	5	4	3	3	2

J	$\frac{47}{2}$	$\frac{49}{2}$	$\frac{51}{2}$	$\frac{55}{2}$
γ	2	1	1	1

$\nu = 6$

J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
γ	3	2	7	7	11	10	15	13	16	14	17	14
J	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
γ	16	13	14	12	12	9	10	7	7	5	5	
J	23	24	25	26	27	28	30					
γ	3	3	2	2	1	1	1					

$\nu = 7$

J	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$
γ	2	6	7	9	12	13	14	16	16	16	17	17
J	$\frac{25}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{29}{2}$	$\frac{31}{2}$	$\frac{33}{2}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{37}{2}$	$\frac{39}{2}$	$\frac{41}{2}$	$\frac{43}{2}$	$\frac{45}{2}$	
γ	15	16	14	13	12	11	9	9	7	6	5	
J	$\frac{47}{2}$	$\frac{49}{2}$	$\frac{51}{2}$	$\frac{53}{2}$	$\frac{55}{2}$	$\frac{57}{2}$	$\frac{59}{2}$	$\frac{63}{2}$				
γ	4	3	3	2	1	1	1	1				

$\nu = 8$

J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
γ	1	2	5	4	8	8	9	9	12	10	11	11	11
J	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23		
γ	10	11	8	9	8	7	6	6	4	4	3		
J	24	25	26	27	28	29	32						
γ	3	2	2	1	1	1	1						

附录 II　准自旋代数 $o(5)_t$ 的不可约表示矩阵元

设

$$P^\dagger[(\hat\epsilon\ t),i,k,\beta,k',\beta'] = \left\langle \begin{array}{c}(\hat\epsilon\ t)\\ \hat\epsilon{-}2i\ t{+}k\ \beta\end{array} \middle\| P^\dagger \middle\| \begin{array}{c}(\hat\epsilon\ t)\\ \hat\epsilon{-}2i{+}2\ t{+}k'\ \beta'\end{array} \right\rangle.$$

不可约表示 $(\hat\epsilon\ 0)$ 不需要简并量子数 β, 故取 $\beta=\beta'=1$, 它只在 $i-k=$ 偶 时, 才有非零约化矩阵元, 其值为

$$P^\dagger[(\hat\epsilon\ 0),i,k,1,k-1,1] = \sqrt{\frac{k(i+k+1)(\hat\epsilon-i-k+2)}{(2k+1)}},$$

$$P^\dagger[(\hat\epsilon\ 0),i,k,1,k+1,1] = \sqrt{\frac{(k+1)(i-k)(\hat\epsilon-i+k+3)}{(2k+1)}}.$$

不可约表示 $(\hat\epsilon\ 1/2)$ 也不需要简并量子数 β. 它的非零约化矩阵元为

$i-k=$ 偶时,

$$P^\dagger[(\hat\epsilon\ 1/2),i,k,1,k-1,1] = \sqrt{\frac{k(i+k+1)(\hat\epsilon-i-k+1)}{(2k+1)}},$$

$$P^\dagger[(\hat\epsilon\ 1/2),i,k,1,k,1] = \sqrt{\frac{(i-k)(\hat\epsilon-i-k+1)}{(2k+1)(2k+3)}},$$

$$P^\dagger[(\hat\epsilon\ 1/2),i,k,1,k+1,1] = -\sqrt{\frac{(k+2)(i-k)(\hat\epsilon-i+k+4)}{(2k+3)}},$$

$i-k=$ 奇时,

$$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\ 1/2),i,k,1,k-1,1]=\sqrt{\frac{k(i+k+2)(\hat{\epsilon}-i-k+2)}{(2k+1)}},$$

$$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\ 1/2),i,k,1,k,1]=\sqrt{\frac{(i+k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+1)(2k+3)}},$$

$$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\ 1/2),i,k,1,k+1,1]=-\sqrt{\frac{(k+2)(i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)}}.$$

不可约表示 $(2t\ t)$ 也不需要简并量子数 β. 它的非零约化矩阵元为

$$P^{\dagger}[(2t\ t),i,k,1,k-1,1]=\sqrt{\frac{(i+k)(i+k-1)(1-k)(2t+k+1)}{(t+k)(2t+2k+1)}},$$

$$P^{\dagger}[(2t\ t),i,k,1,k,1]=(t+1)\sqrt{\frac{(i+k)(2t-i+k+1)}{(t+k)(t+k+1)}},$$

$$P^{\dagger}[(2t\ t),i,k,1,k+1,1]$$
$$=\sqrt{\frac{(-k)(2t-i+k+1)(2t-i+k+2)(2t+k+2)}{(t+k+1)(2t+2k+1)}}.$$

表 1　不可约表示 $(\hat{\epsilon}\ 1)$ 的约化矩阵元

$$RE(i,k)=(i+2)\hat{\epsilon}-(i+k)(i-k-1)-2(i-k-2)$$

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\ 1),i,k,\beta,k',\beta']\ \ i-k=$ 偶
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(k+1)(i+k+1)(\hat{\epsilon}-i-k+2)RE(i,k)}{(2k+3)RE(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$-\left[\frac{(i-k)k(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)RE(i-1,k-1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{k(k+2)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)RE(i-1,k-1)}{(k+1)(2k+3)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$-\left[\frac{(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+4)}{RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	k	1	$\left[\frac{(i-k)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(k+1)(k+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+5)RE(i,k)}{(2k+3)RE(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$-\left[\frac{(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i-k)}{(2k+3)RE(i-1,k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	1	0
2	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(k+3)(\hat{\epsilon}-i+k+3)RE(i-1,k+1)}{(k+2)(2k+3)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
			$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\ 1),i,k,\beta,k',\beta']\ \ i-k=$ 奇
1	$k-1$	1	$\left[\frac{k(k+2)(i+k+2)(\hat{\epsilon}-i-k+1)}{(k+1)(2k+3)}\right]^{1/2}$
1	k	1	0
1	k	2	$\left[\frac{RE(i-1,k)}{(k+1)(k+2)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(k+1)(k+3)(i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{(k+2)(2k+3)}\right]^{1/2}$

表 2 不可约表示 $(\hat{\epsilon}\ 3/2)$ 的约化矩阵元

$$RE(i,k) = (2i-k+3)\hat{\epsilon} - 2(i-k)(i+k) - 4i + 5k + 3,$$

$$RO(i,k) = (2i+k+7)\hat{\epsilon} - 2(i-k)(i+k) - 4i + 11k + 15.$$

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\ 3/2), i, k, \beta, k', \beta']$ $i-k=$ 偶
1	$k-1$	1	$\left[\dfrac{(k+1)(i+k+1)(\hat{\epsilon}-i-k+1)RE(i,k)}{(2k+3)RE(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$\left[\dfrac{3(i-k)k(k+1)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{(k+2)(2k+3)RE(i-1,k-1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\dfrac{k(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k-1)RE(i-1,k-1)}{(k+2)(2k+3)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\dfrac{(i-k-2)(\hat{\epsilon}-i-k+1)RE(i,k)}{(2k+3)(2k+5)RO(i-1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$\left[\dfrac{12(k+1)(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{(2k+3)(2k+5)RE(i,k)RO(i-1,k)}\right]^{1/2}$
2	k	1	0
2	k	2	$\left[\dfrac{9(i-k)(\hat{\epsilon}-i-k-1)RO(i-1,k)}{(2k+3)(2k+5)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\dfrac{(i-k-2)(k+3)(\hat{\epsilon}-i+k+6)RE(i,k)}{(2k+5)RE(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$\left[\dfrac{3(k+3)(k+4)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k-1)}{(k+2)(2k+5)RE(i-1,k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	1	0
2	$k+1$	2	$-\left[\dfrac{(i-k)(k+1)(k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+4)RE(i-1,k+1)}{(k+2)(2k+5)RE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 2

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\ 3/2),i,k,\beta,k',\beta']\ \ i-k=$ 奇
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(k+1)(i+k+2)(\hat{\epsilon}-i-k+2)RO(i,k)}{(2k+3)RO(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$\left[\frac{3(i-k-1)k(k+1)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(k+2)(2k+3)RO(i-1,k-1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{k(k+3)(i+k+4)(\hat{\epsilon}-i-k)RO(i-1,k-1)}{(k+2)(2k+3)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(i+k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+5)RO(i,k)}{(2k+3)(2k+5)RE(i-1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$\left[\frac{12(i-k-1)(k+1)(k+3)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k)}{(2k+3)(2k+5)RE(i-1,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	k	1	0
2	k	2	$\left[\frac{9(i+k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+3)RE(i-1,k)}{(2k+3)(2k+5)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(i-k-3)(k+3)(\hat{\epsilon}-i+k+5)RO(i,k)}{(2k+5)RO(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$\left[\frac{3(k+3)(k+4)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k)}{(k+2)(2k+5)RO(i-1,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	1	0
2	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+3)RO(i-1,k+1)}{(k+2)(2k+5)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

表 3 不可约表示 $(\hat{\epsilon}\,2)$ 的约化矩阵元

$$QE(i,k) = (2i^2 - k^2 + 12i - 5k + 12)\hat{\epsilon}^2 - (4i^3 - 4ik^2 + 24i^2 - 6k^2 - 20ik + 16i - 30k - 24)\hat{\epsilon} + 2(i-k-2)(i-k)(i+k+3)(i+k+5),$$

$$SE(i,k) = (2i^2 + k^2 + 8i + 5k + 12)\hat{\epsilon}^2 - (4i^3 - 4ik^2 + 12i^2 - 14k^2 - 20ik - 28i - 70k - 96)\hat{\epsilon} + 2(i-k-2)(i+k+3)(i^2 - k^2 + i - 5k - 12),$$

$$RO(i,k) = (i+3)\hat{\epsilon} - (i-k-1)(i+k+4).$$

β	k'	β'	$P^\dagger[(\hat{\epsilon}\,2), i, k, \beta, k', \beta']$ $i-k=$ 偶
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(k+2)(i+k+1)(\hat{\epsilon}-i-k+2)SE(i,k)}{(2k+5)SE(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$\left[\frac{6(i-k-2)(k+1)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i+k+5)QE(i-1,k-1)}{(2k+5)SE(i-1,k-1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	3	0
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{(k+1)(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)SE(i-1,k-1)QE(i,k)}{(k+2)(2k+5)QE(i-1,k-1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	3	$\left[\frac{2(i-k)k(k+1)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i+k+3)SE(i,k)}{(k+2)(2k+5)QE(i-1,k-1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
3	$k-1$	1	0
3	$k-1$	2	0
3	$k-1$	3	$\left[\frac{k(k+4)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-2)QE(i-1,k-1)}{(k+2)(2k+5)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{6(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+4)RO(i-1,k)}{SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	0
2	k	1	$\left[\frac{(i-k-2)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+5)QE(i,k)}{(k+2)(k+3)RO(i-1,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 3

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\,2), i, k, \beta, k', \beta']$ $i-k=$ 偶
2	k	2	$\left[\frac{(k+1)(k+4)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+6)SE(i,k)}{(k+2)(k+3)RO(i-1,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
3	k	1	0
3	k	2	$\left[\frac{8(i-k)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)RO(i-1,k)}{(k+2)(k+3)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(i-k-4)(k+3)(\hat{\epsilon}-i+k+7)SE(i,k)}{(2k+5)SE(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$\left[\frac{6(k+4)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i-k)QE(i-1,k+1)}{(2k+5)SE(i-1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	3	0
2	$k+1$	1	0
2	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+5)SE(i-1,k+1)QE(i,k)}{(k+3)(2k+5)QE(i-1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	3	$\left[\frac{2(k+4)(k+5)(i+k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i-k-2)SE(i,k)}{(k+3)(2k+5)QE(i-1,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
3	$k+1$	1	0
3	$k+1$	2	0
3	$k+1$	3	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(k+5)(\hat{\epsilon}-i+k+3)QE(i-1,k+1)}{(k+3)(2k+5)QE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 3

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\,2),i,k,\beta,k',\beta']$ $i-k=$ 奇
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(k+1)(k+3)(i+k+2)(\bar{\epsilon}-i-k+1)RO(i,k)}{(k+2)(2k+5)RO(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$\left[\frac{(i-k-1)k(k+1)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{(k+2)(2k+5)RO(i-1,k-1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{k(k+4)(i+k+4)(\hat{\epsilon}-i-k-1)RO(i-1,k-1)}{(k+2)(2k+5)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	0
1	k	2	$\left[\frac{RO(i,k)SE(i-1,k)}{(k+2)(k+3)QE(i-1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	3	$\left[\frac{2(i-k-1)(k+1)(k+4)(i+k+4)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{(k+2)(k+3)QE(i-1,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	k	1	0
2	k	2	0
2	k	3	$\left[\frac{2QE(i-1,k)}{(k+2)(k+3)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(i-k-3)(k+2)(k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+6)RO(i,k)}{(k+3)(2k+5)RO(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$\left[\frac{(k+4)(k+5)(i+k+4)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i-k-1)}{(k+3)(2k+5)RO(i-1,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	1	0
2	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(k+5)(\hat{\epsilon}-i+k+4)RO(i-1,k+1)}{(k+3)(2k+5)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

表 4 不可约表示$(\hat{\epsilon}\,5/2)$ 的约化矩阵元

$$\begin{aligned}SE(i,k) = {} & [(2i^2-2ik+k^2+4i+k+4)\hat{\epsilon}^2-2(i-k-2)(2i-k+4)(i+k+3)\hat{\epsilon}+2k^4+18k^3\\ & +(-4i^2-8i+59)k^2+(-18i^2-36i+87)k+2i^4+8i^3-16i^2-48i+44]/2,\\ QE(i,k) = {} & [(4i^2-2ik-k^2+22i-13k+20)\hat{\epsilon}^2-2(i-k)(i+k+5)(4i-k+7)\hat{\epsilon}+4k^2+42k^3\\ & +(-8i^2-32i+121)k^2+(-42i^2-168i+63)k+4i^4+32i^3+46i^2-72i-20]/2,\\ SO(i,k) = {} & [(2i^2+2ik+k^2+16i+11k+34)\hat{\epsilon}^2-2(i-k-3)(i+k+4)(2i+k+10)\hat{\epsilon}+2k^4+30k^3\\ & +(-4i^2-8i+167)k^2+(-30i^2-60i+405)k+2i^4+8i^3-52i^2-120i+350]/2,\\ QO(i,k) = {} & [(4i^2+2ik-k^2+34i+k+62)\hat{\epsilon}^2-2(i-k-1)(i+k+6)(4i+k+13)\hat{\epsilon}+4k^4+54k^3\\ & +(-8i^2-32i+229)k^2+(-54i^2-216i+309)k+4i^4+32i^3+10i^2-216i+70]/2.\end{aligned}$$

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\,5/2),i,k,\beta,k',\beta']$ $i-k=$ 偶
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(k+2)(i+k+1)(\hat{\epsilon}-i-k+1)SE(i,k)}{(2k+5)SE(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$\left[\frac{(i-k-2)(k+1)(k+2)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i+k+6)QE(i-1,k-1)}{(k+3)(2k+5)SE(i-1,k-1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	3	0
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{(k+1)(k+4)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k-1)SE(i-1,k-1)QE(i,k)}{(k+3)(2k+5)QE(i-1,k-1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	3	$\left[\frac{5(i-k)k(k+1)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i+k+4)SE(i,k)}{(k+3)(2k+5)QE(i-1,k-1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
3	$k-1$	1	0
3	$k-1$	2	0
3	$k-1$	3	$\left[\frac{k(k+5)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-3)QE(i-1,k-1)}{(k+3)(2k+5)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(i-k-4)(\hat{\epsilon}-i-k+1)SE(i,k)}{(2k+5)(2k+7)SO(i-1,k)}\right]^{1/2}$

续 表 4

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\,5/2),i,k,\beta,k',\beta']\ \ i-k=$ 偶
1	k	2	$\left[\frac{4(k+2)(k+4)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i+k+6)QO(i-1,k)}{(2k+5)(2k+7)SO(i-1,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	3	0
2	k	1	0
2	k	2	$\left[\frac{9(i-k-2)(\hat{\epsilon}-i-k-1)SO(i-1,k)QE(i,k)}{(2k+5)(2k+7)QO(i-1,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	k	3	$\left[\frac{20(k+1)(k+5)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i+k+4)SE(i,k)}{(2k+5)(2k+7)QO(i-1,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
3	k	1	0
3	k	2	0
3	k	3	$\left[\frac{25(i-k)(\hat{\epsilon}-i-k-3)QO(i-1,k)}{(2k+5)(2k+7)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(i-k-4)(k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+8)SE(i,k)}{(2k+7)SE(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$\left[\frac{(k+4)(k+5)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k-1)QE(i-1,k+1)}{(k+3)(2k+7)SE(i-1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	3	0
2	$k+1$	1	0
2	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(k+5)(\hat{\epsilon}-i+k+6)SE(i-1,k+1)QE(i,k)}{(k+3)(2k+7)QE(i-1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	3	$\left[\frac{5(k+5)(k+6)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i-k-3)SE(i,k)}{(k+3)(2k+7)QE(i-1,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
3	$k+1$	1	0
3	$k+1$	2	0

续 表 4

β	k'	β'	$P^\dagger[(\hat{\epsilon}\,5/2),i,k,\beta,k',\beta']\quad i-k=$ 偶
3	$k+1$	3	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(k+6)(\hat{\epsilon}-i+k+4)QE(i-1,k+1)}{(k+3)(2k+7)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
			$P^\dagger[(\hat{\epsilon}\,5/2),i,k,\beta,k',\beta']\quad i-k=$ 奇
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(k+2)(i+k+2)(\hat{\epsilon}-i-k+2)SO(i,k)}{(2k+5)SO(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$\left[\frac{(i-k-3)(k+1)(k+2)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i+k+5)QO(i-1,k-1)}{(k+3)(2k+5)SO(i-1,k-1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	3	0
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{(k+1)(k+4)(i+k+4)(\hat{\epsilon}-i-k)SO(i-1,k-1)QO(i,k)}{(k+3)(2k+5)QO(i-1,k-1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	3	$\left[\frac{5(i-k-1)k(k+1)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i+k+3)SO(i,k)}{(k+3)(2k+5)QO(i-1,k-1)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
3	$k-1$	1	0
3	$k-1$	2	0
3	$k-1$	3	$\left[\frac{k(k+5)(i+k+6)(\hat{\epsilon}-i-k-2)QO(i-1,k-1)}{(k+3)(2k+5)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(i+k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+7)SO(i,k)}{(2k+5)(2k+7)SE(i-1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$\left[\frac{4(k+2)(k+4)(i-k-3)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k)QE(i-1,k)}{(2k+5)(2k+7)SE(i-1,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	3	0
2	k	1	0
2	k	2	$\left[\frac{9(i+k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+5)SE(i-1,k)QO(i,k)}{(2k+5)(2k+7)QE(i-1,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 4

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(\hat{\epsilon}\,5/2),i,k,\beta,k',\beta']\quad i-k=$ 奇
2	k	3	$\left[\frac{20(k+1)(k+5)(i-k-1)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i-k-2)SO(i,k)}{(2k+5)(2k+7)QE(i-1,k)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
3	k	1	0
3	k	2	0
3	k	3	$\left[\frac{25(i+k+6)(\hat{\epsilon}-i+k+3)QE(i-1,k)}{(2k+5)(2k+7)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(i-k-5)(k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+7)SO(i,k)}{(2k+7)SO(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$\left[\frac{(k+4)(k+5)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k)QO(i-1,k+1)}{(k+3)(2k+7)SO(i-1,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	3	0
2	$k+1$	1	0
2	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k-3)(k+2)(k+5)(\hat{\epsilon}-i+k+5)SO(i-1,k+1)QO(i,k)}{(k+3)(2k+7)QO(i-1,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	3	$\left[\frac{5(k+5)(k+6)(i+k+6)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i-k-2)SO(i,k)}{(k+3)(2k+7)QO(i-1,k+1)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
3	$k+1$	1	0
3	$k+1$	2	0
3	$k+1$	3	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(k+6)(\hat{\epsilon}-i+k+3)QO(i-1,k+1)}{(k+3)(2k+7)QO(i,k)}\right]^{1/2}$

表 5 不可约表示 $(2t+2\,t)$ 的约化矩阵元

$$RE(i,k) = 2(i+k)t^2 + (9k+5i-4)t + k^2 + (6-i)k + 4i - 4$$

$$RO(i,k) = 2(i+k-1)t^2 + (3k+7i-3)t - k^2 + (i+2)k + 5i - 1$$

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(2t+2\,t),i,k,\beta,k',\beta']\ \ i-k=$ 偶
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(2-k)(i+k-3)(i+k)(2t+k+1)RE(i,k)}{(t+k)(2t+2k+1)RE(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$(2t+3)\left[\frac{(i+k-2)(i+k)(t+1)(t+2)(2t-i+k+1)(2t-i+k+2)}{(t+k)(2t+2k+1)RE(i-1,k-1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{(1-k)(i+k-2)(i+k-1)(2t+k+2)RE(i-1,k-1)}{(t+k)(2t+2k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(i+k)(t+1)(t+2)(2t-i+k+1)RO(i-1,k)}{(t+k)(t+k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	0
2	k	1	$(2t+3)(2t-i+k+2)\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(2t+k+2)(2t-i+k+2)}{(t+k)(t+k+1)RO(i-1,k)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	k	2	$\left[\frac{(i+k-2)(t+1)(t+2)(2t-i+k+3)RE(i,k)}{(t+k)(t+k+1)RO(i-1,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$\left[\frac{(1-k)(2t+k+2)(2t-i+k+1)(2t-i+k+2)RE(i-1,k+1)}{(t+k+1)(2t+2k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	0
2	$k+1$	1	$-(2t+3)(4t+3k-i+4)\left[\frac{(i+k-1)(i+k)(t+1)(t+2)}{(t+k+1)(2t+2k+1)RE(i-1,k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	2	$\left[\frac{(-k)(2t+k+3)(2t-i+k+3)(2t-i+k+4)RE(i,k)}{(t+k+1)(2t+2k+1)RE(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$

续 表 5

β	k'	β'	$P^{\dagger}[(2t+2\ t),i,k,\beta,k',\beta']\ \ i-k=$ 奇
1	$k-1$	1	$\left[\frac{(2-k)(i+k-2)(i+k-1)(2t+k+1)RO(i,k)}{(t+k)(2t+2k+1)RO(i-1,k-1)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$(2t+3)\left[\frac{(i+k-3)(i+k-1)(t+1)(t+2)(2t-i+k+1)(2t-i+k+2)}{(t+k)(2t+2k+1)RO(i-1,k-1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k-1$	1	0
2	$k-1$	2	$\left[\frac{(1-k)(i+k-3)(i+k)(2t+k+2)RO(i-1,k-1)}{(t+k)(2t+2k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(i+k-2)(t+1)(t+2)(2t-i+k+1)RO(i,k)}{(t+k)(t+k+1)RE(i-1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$(2t+3)\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(2t+k+2)(2t-i+k+1)(2t-i+k+2)(2t-i+k+3)}{(t+k)(t+k+1)RE(i-1,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	k	1	0
2	k	2	$\left[\frac{(i+k)(t+1)(t+2)(2t-i+k+3)RE(i-1,k)}{(t+k)(t+k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	$\left[\frac{(1-k)(2t+k+2)(2t-i+k+1)(2t-i+k+2)RO(i-1,k+1)}{(t+k+1)(2t+2k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	0
2	$k+1$	1	$-(2t+3)(4t+3k-i+5)\left[\frac{(i+k-1)(i+k)(t+1)(t+2)}{(t+k+1)(2t+2k+1)RO(i-1,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
2	$k+1$	2	$\left[\frac{(-k)(2t+k+3)(2t-i+k+3)(2t-i+k+4)RO(i,k)}{(t+k+1)(2t+2k+1)RO(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$

附录 III 准自旋代数 $o(5)_t$ 的约化系数

取 $\epsilon_2=\hat{\epsilon}-2i-\epsilon_1$, 表中约化系数记为

$$\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}_2\ t_2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ T_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \epsilon\ T\ \beta \end{matrix} \right\rangle$$

$$=\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}_2\ t_2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ t_2+k_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ t) \\ \hat{\epsilon}-2i\ t+k\ \beta \end{matrix} \right\rangle.$$

表 1 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}-1\ 0) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ k_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ 1/2) \\ \hat{\epsilon}-2i\ 1/2+k \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	$i-k=$ 偶	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	0	$-\left[\frac{(\hat{\epsilon}-i-k)}{(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	$-\left[\frac{(i-k)}{(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$	0
1	k	$\left[\frac{(\hat{\epsilon}-i+k+2)}{(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$	0
−1	k	0	$\left[\frac{(i+k+2)}{(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$

表 2 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ 0) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ k_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ 1/2) \\ \hat{\epsilon}-2i\ 1/2+k \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	$i-k=$ 偶	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	$\left[\frac{(i+k+3)}{(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$	0
–1	$k+1$	0	$-\left[\frac{(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$
1	k	0	$-\left[\frac{(i-k+1)}{(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$
–1	k	$\left[\frac{(\hat{\epsilon}-i-k+1)}{(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$	0

表 3 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (2t\ t) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ t+k_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (2t+1\ t+1/2) \\ 2t+1-2i\ 1/2+k \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	$i-k=$ 偶和奇
1	$k+1$	$-\left[\frac{(-k)(i+k+1)}{2(2t+1)(t+k+1)}\right]^{1/2}$
–1	$k+1$	$\left[\frac{(-k)(2t-i+k+2}{2(2t+1)(t+k+1)}\right]^{1/2}$
1	k	$\left[\frac{(2t-i+k+1)(2t+k+2)}{2(2t+1)(t+k+1)}\right]^{1/2}$
–1	k	$\left[\frac{(i+k)(2t+k+2)}{2(2t+1)(t+k+1)}\right]^{1/2}$

表 4 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}-1\ 1/2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ 1/2+k_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ 1) \\ \hat{\epsilon}-2i\ 1+k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	$\left[\frac{(k+2)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	$-(i-k+1)\left[\frac{(k+2)(\hat{\epsilon}-i-k)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(i-k)(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	$-(i+k+4)\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$-(\hat{\epsilon}-i-k-1)\left[\frac{(i-k)(k+1)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$(\hat{\epsilon}-i+k+2)\left[\frac{(k+2)(i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	$\left[\frac{(i-k)(k+2)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
ϵ_1	k_2	β	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k-1)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+2)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	$\left[\frac{(k+2)(i+k+2)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)}\right]^{1/2}$

$$RE(i,k) = (i+2)\hat{\epsilon} - (i+k)(i-k-1) - 2(i-k-2)$$

表 5 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ 1/2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ 1/2+k_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ 1) \\ \hat{\epsilon}-2i\ 1+k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	$\left[\frac{(i-k)(k+2)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
–1	$k+1$	1	$(\hat{\epsilon}-i+k+2)\left[\frac{(k+2)(i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
–1	k	1	$(\hat{\epsilon}-i-k-1)\left[\frac{(i-k)(k+1)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	$(i+k+4)\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
–1	$k+1$	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$-(i-k+1)\left[\frac{(k+2)(\hat{\epsilon}-i-k)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
–1	k	2	$\left[\frac{(k+2)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
ϵ_1	k_2	β	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	$\left[\frac{(k+1)(i+k+4)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$
–1	$k+1$	1	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$
1	k	1	$-\left[\frac{(i-k+1)(k+2)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$
–1	k	1	$\left[\frac{(k+2)(\hat{\epsilon}-i-k+1)}{(2k+3)(\hat{\epsilon}+4)}\right]^{1/2}$

$$RE(i,k)=(i+2)\hat{\epsilon}-(i+k)(i-k-1)-2(i-k-2)$$

表 6 $\left\langle \begin{matrix} (1\,1/2) & (\hat\epsilon{-}1\,1) \\ \epsilon_1\,1/2 & \epsilon_2\,1{+}k_2\,\beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon\,3/2) \\ \hat\epsilon{-}2i\;\;3/2{+}k\,\beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(k+3)(i+k+3)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+4)}{3(k+2)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+5)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	1	$\left[\frac{(i-k-2)(\hat\epsilon+3)RE(i,k)}{3(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+5)R2E(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	1	$(i-k+2)\left[\frac{(k+3)(i+k+3)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+4)}{3(k+2)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+5)R2E(i-1,k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	1	$-\left[\frac{(\hat\epsilon+3)(\hat\epsilon-i+k+4)RE(i,k)}{3(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+5)R2E(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+3)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+2)(\hat\epsilon-i+k+4)}{3(k+2)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+5)R2E(i,k)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	1	$(i+k+6)\left[\frac{(k+1)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i+k+4)}{3(k+2)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+5)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	2	$-(\hat\epsilon-i-k-2)\left[\frac{(i-k)(k+1)}{(k+2)(\hat\epsilon+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	0
−1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)R2E(i-1,k+1)}{(k+2)(\hat\epsilon+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$\left[\frac{(k+3)(\hat\epsilon-i+k+2)R2E(i,k)}{(k+2)(\hat\epsilon+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	2	$\left[\frac{(i-k)(k+3)(i+k+3)(\hat\epsilon-i-k-1)}{(k+2)(\hat\epsilon+2)RE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 6

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	1	$\left[\frac{(\hat{\epsilon}+3)(\hat{\epsilon}-i-k)RO(i,k)}{3(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+5)R2E(i,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+3)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+5)R2E(i,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	1	$(i-k+2)\left[\frac{(k+3)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}-i-k)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+5)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+5)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	1	$-\left[\frac{(i+k+2)(\hat{\epsilon}+3)RO(i,k)}{3(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+5)R2E(i-1,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	1	$(i+k+6)\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+5)R2E(i-1,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	2	0
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k-2)R2E(i,k+1)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	2	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(i+k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	$(\hat{\epsilon}-i+k+2)\left[\frac{(k+3)(i+k+4)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	0
-1	k	2	2	$\left[\frac{(k+3)(i+k+4)R2E(i-1,k)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

$R2E(i,k)=(i+2)\hat{\epsilon}-(i+k)(i-k-1)-3i+2k+2,\quad RE(i,k)=(2i-k+3)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-4i+5k+3,$
$RO(i,k)=(2i+k+7)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-4i+11k+15.$

表 7 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat\epsilon{+}1\ 1) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ 1{+}k_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon\ 3/2) \\ \hat\epsilon{-}2i\ \ 3/2{+}k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(i+k+3)(\hat\epsilon+3)RE(i,k)}{3(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon+4)R2E(i+1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	$-\left[\frac{(i-k)(k+3)(i+k+3)(i+k+5)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+4)}{3(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon+4)R2E(i+1,k+1)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	1	$-(\hat\epsilon-i+k+1)\left[\frac{(k+3)(i+k+3)(\hat\epsilon+5)}{3(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	1	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+3)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i+k+4)}{3(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	1	$-\left[\frac{(\hat\epsilon+3)(\hat\epsilon-i-k+1)RE(i,k)}{3(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon+4)R2E(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	1	$-(\hat\epsilon-i-k-3)\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+3)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i+k+4)}{3(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon+4)R2E(i,k)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	2	0
1	$k+1$	2	2	$\left[\frac{(k+1)(i+k+5)R2E(i+1,k+1)}{(k+2)(\hat\epsilon+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+4)}{(k+2)(\hat\epsilon+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	$-(i-k+1)\left[\frac{(k+3)(\hat\epsilon-i-k-1)}{(k+2)(\hat\epsilon+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	2	0
−1	k	2	2	$\left[\frac{(k+3)(\hat\epsilon-i-k-1)R2E(i,k)}{(k+2)(\hat\epsilon+4)RE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 7

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+3)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	1	$\left[\frac{(\hat{\epsilon}+3)(\hat{\epsilon}-i+k+5)RO(i,k)}{3(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+4)R2E(i,k+1)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	1	$-(\hat{\epsilon}-i+k+1)\left[\frac{(i-k-1)(k+3)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+4)R2E(i,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	1	$\left[\frac{(i-k-1)(\hat{\epsilon}+3)RO(i,k)}{3(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+4)R2E(i+1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(i-k+1)(k+1)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+4)R2E(i+1,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	1	$-(\hat{\epsilon}-i-k-3)\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(\hat{\epsilon}+5)}{3(k+2)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	2	$(i+k+5)\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	0
−1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2E(i,k+1)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$-\left[\frac{(i-k+1)(k+3)R2E(i+1,k)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	2	$\left[\frac{(k+3)(i+k+4)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+3)}{(k+2)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

$R2E(i,k)=(i+2)\hat{\epsilon}-(i+k)(i-k-1)-i+2k+6$, $\quad RE(i,k)=(2i-k+3)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-4i+5k+3$, $RO(i,k)=(2i+k+7)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-4i+11k+15$.

表 8 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}-1\ \ 3/2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ \ 3/2+k_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ 2) \\ \hat{\epsilon}-2i\ 2+k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+5)R2O(i,k+1)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+6)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	0
−1	$k+1$	1	1	$(i-k+1)\left[\frac{(k+3)(\hat{\epsilon}-i-k)R2E(i-1,k+1)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+6)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	1	0
1	k	1	1	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+5)R2E(i,k)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+6)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	0
−1	k	1	1	$(i+k+6)\left[\frac{(k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+5)R2O(i-1,k)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+6)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	1	0
1	$k+1$	1	2	$-(\hat{\epsilon}-i-k-1)\left[\frac{3(i-k-2)(k+2)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+4)(i+k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)SE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	$-\left[\frac{3(i-k-2)(k+2)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i+k+5)QE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i-1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	2	$(i-k+3)\left[\frac{(k+4)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i-k-2)SE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i-1,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	$(\hat{\epsilon}-i+k+4)\left[\frac{3(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)SE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 8

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
-1	k	1	2	$\left[\frac{3(i-k-2)(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i-k)QE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i-1,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	2	$(i+k+8)\left[\frac{(k+1)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i+k+3)SE(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i-1,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	3	0
1	$k+1$	2	3	$-(\hat{\epsilon}-i-k-3)\left[\frac{(i-k)(k+1)R2O(i,k+1)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	3	0
-1	$k+1$	2	3	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2E(i-1,k+1)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	3	0
1	k	2	3	$(\hat{\epsilon}-i+k+2)\left[\frac{(k+4)(i+k+5)R2E(i,k)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	3	0
-1	k	2	3	$\left[\frac{(i-k)(k+4)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-2)R2O(i-1,k)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{3(k+2)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i-k-1)RO(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+4)(i+k+4)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i-k-3)(\hat{\epsilon}-i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{3(i-k-3)(k+2)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	1	$(i-k+3)\left[\frac{(k+4)(i+k+4)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i-1,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 8

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	k	1	1	$\left[\frac{3(k+3)(\hat{\epsilon}+4)(\hat{\epsilon}-i+k+4)RO(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(i+k+4)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2O(i,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	1	$\left[\frac{3(k+3)(i+k+2)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i-1,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	1	$(i+k+8)\left[\frac{(i-k-1)(k+1)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}-i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+6)R2E(i-1,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	2	0
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k-3)R2E(i,k+1)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	2	0
-1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)R2O(i-1,k+1)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$\left[\frac{(k+4)(\hat{\epsilon}-i+k+2)R2O(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	0
-1	k	2	2	$\left[\frac{(k+4)(i+k+4)R2E(i-1,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

$R2E(i,k)=(2i-k+3)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-6i+6k,\qquad R2O(i,k)=(2i+k+7)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-6i+10k+8,$
$QE(i,k)=(2i^2-k^2+12i-5k+12)\hat{\epsilon}^2-(4i^3-4ik^2+24i^2-6k^2-20ik+16i-30k-24)\hat{\epsilon}$
$\quad+2(i-k-2)(i-k)(i+k+3)(i+k+5),\qquad RO(i,k)=(i+3)\hat{\epsilon}-(i-k-1)(i+k+4),$
$SE(i,k)=(2i^2+k^2+8i+5k+12)\hat{\epsilon}^2-(4i^3-4ik^2+12i^2-14k^2-20ik-28i-70k-96)\hat{\epsilon}$
$\quad+2(i-k-2)(i+k+3)(i^2-k^2+i-5k-12).$

表 9 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat\epsilon{+}1\ 3/2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ \ 3/2{+}k_2\ \beta_2 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} (\hat\epsilon\ 2) \\ \hat\epsilon{-}2i\ 2{+}k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+3)(i+k+3)(\hat\epsilon-i-k)R2E(i+1,k+1)}{(2k+5)\hat\epsilon SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	0
-1	$k+1$	1	1	$-(\hat\epsilon-i+k+2)\left[\frac{(k+3)(i+k+3)R2O(i,k+1)}{(2k+5)\hat\epsilon SE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	1	0
1	k	1	1	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(i+k+3)(\hat\epsilon-i+k+5)R2O(i+1,k)}{(2k+5)\hat\epsilon SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	0
-1	k	1	1	$-(\hat\epsilon-i-k-3)\left[\frac{(i-k-2)(k+2)R2E(i,k)}{(2k+5)\hat\epsilon SE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	1	0
1	$k+1$	1	2	$(i+k+4)\left[\frac{3(k+2)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon-i+k+5)QE(i,k)}{2(2k+5)\hat\epsilon(\hat\epsilon+4)R2E(i+1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+4)(i+k+5)(\hat\epsilon+6)(\hat\epsilon-i-k-2)SE(i,k)}{2(2k+5)\hat\epsilon(\hat\epsilon+4)R2E(i+1,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	2	$-\left[\frac{3(i-k-2)(k+2)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon-i-k)(\hat\epsilon-i+k+5)QE(i,k)}{2(2k+5)\hat\epsilon(\hat\epsilon+4)R2O(i,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	2	$-(\hat\epsilon-i+k)\left[\frac{(k+4)(i+k+5)(\hat\epsilon+6)SE(i,k)}{2(2k+5)\hat\epsilon(\hat\epsilon+4)R2O(i,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	$-(i-k-1)\left[\frac{3(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon-i-k)QE(i,k)}{2(2k+5)\hat\epsilon(\hat\epsilon+4)R2O(i+1,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+5)(\hat\epsilon+6)(\hat\epsilon-i+k+3)SE(i,k)}{2(2k+5)\hat\epsilon(\hat\epsilon+4)R2O(i+1,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 9

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
-1	k	1	2	$\left[\frac{3(k+3)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+5)QE(i,k)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2E(i,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	2	$-(\hat{\epsilon}-i-k-5)\left[\frac{(i-k)(k+1)(\hat{\epsilon}+6)SE(i,k)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2E(i,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	3	0
1	$k+1$	2	3	$(i+k+6)\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2E(i+1,k+1)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	3	0
-1	$k+1$	2	3	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2O(i,k+1)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	3	0
1	k	2	3	$-(i-k+1)\left[\frac{(k+4)(\hat{\epsilon}-i-k-2)R2O(i+1,k)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	3	0
-1	k	2	3	$\left[\frac{(k+4)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2E(i,k)}{(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
ϵ_1	k_2	β_2	β	$\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat{\epsilon}+1\ 3/2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ 3/2+k_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle\vert \begin{matrix} (\hat{\epsilon}\ 2) \\ \hat{\epsilon}-2i\ 2+k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$ $i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	1	$\left[\frac{3(k+2)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2O(i+1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+4)(i+k+4)(i+k+6)(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2O(i+1,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{3(k+2)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}-i+k+6)RO(i,k)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2E(i,k+1)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	1	$-(\hat{\epsilon}-i+k)\left[\frac{(i-k-1)(k+4)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i-k-1)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2E(i,k+1)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 9

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	k	1	1	$-\left[\frac{3(i-k-1)(k+3)(\hat{\epsilon}+2)RO(i,k)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2E(i+1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-\left[\frac{(i-k-1)(i-k+1)(k+1)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i-k-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2E(i+1,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	1	$\left[\frac{3(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}-i-k+1)RO(i,k)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2O(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	1	$-(\hat{\epsilon}-i-k-5)\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+6)(\hat{\epsilon}-i+k+4)}{2(2k+5)\hat{\epsilon}(\hat{\epsilon}+4)R2O(i,k)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	2	0
1	$k+1$	2	2	$\left[\frac{(k+1)(i+k+6)R2O(i+1,k+1)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	2	0
-1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)R2E(i,k+1)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$-\left[\frac{(i-k+1)(k+4)R2E(i+1,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	0
-1	k	2	2	$\left[\frac{(k+4)(\hat{\epsilon}-i-k-1)R2O(i,k)}{2(2k+5)(\hat{\epsilon}+4)RO(i,k)}\right]^{1/2}$

$R2E(i,k)=(2i-k+3)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-2i+4k+6,\quad R2O(i,k)=(2i+k+7)\hat{\epsilon}-2(i-k)(i+k)-2i+12k+22,$
$QE(i,k)=(2i^2-k^2+12i-5k+12)\hat{\epsilon}^2-(4i^3-4ik^2+24i^2-6k^2-20ik+16i-30k-24)\hat{\epsilon}$
$+2(i-k-2)(i-k)(i+k+3)(i+k+5),\quad RO(i,k)=(i+3)\hat{\epsilon}-(i-k-1)(i+k+4),$
$SE(i,k)=(2i^2+k^2+8i+5k+12)\hat{\epsilon}^2-(4i^3-4ik^2+12i^2-14k^2-20ik-28i-70k-96)\hat{\epsilon}$
$+2(i-k-2)(i+k+3)(i^2-k^2+i-5k-12).$

表 10 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat\epsilon{-}1\ 2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ 2{+}k_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon\ 5/2) \\ \hat\epsilon{-}2i\ \ 5/2{+}k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(k+4)(i+k+3)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+6)R2O(i,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	0
−1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{6(i-k-4)(\hat\epsilon+3)SE(i,k)}{5(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	1	$(i-k+2)\left[\frac{(k+4)(i+k+3)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+6)Q2E(i-1,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i-1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	3	1	0
1	k	1	1	$\left[\frac{6(\hat\epsilon+3)(\hat\epsilon-i+k+6)SE(i,k)}{5(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(i+k+3)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+4)(\hat\epsilon-i+k+6)Q2E(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	3	1	0
−1	k	1	1	$(i+k+8)\left[\frac{(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i+k+6)R2O(i-1,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	1	0
1	$k+1$	1	2	$-(\hat\epsilon-i-k-2)\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(\hat\epsilon+5)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)R2O(i,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+5)(i+k+5)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon-i-k-3)(\hat\epsilon-i+k+4)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)R2O(i,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	0
−1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(\hat\epsilon+5)S2E(i-1,k+1)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)Q2E(i-1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 10

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
-1	$k+1$	3	2	$(i-k+4)\left[\frac{2(k+5)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}-i-k-3)(\hat{\epsilon}-i+k+4)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)Q2E(i-1,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$\left[\frac{(k+4)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i+k+4)S2E(i,k)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)Q2E(i,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	3	2	$-\left[\frac{2(i-k)(k+1)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}-i-k-3)(\hat{\epsilon}-i+k+2)(\hat{\epsilon}-i+k+4)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)Q2E(i,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	$\left[\frac{(i-k-2)(k+4)(i+k+3)(\hat{\epsilon}+5)(\hat{\epsilon}-i-k-1)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)R2O(i-1,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	2	$(i+k+10)\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}-i+k+4)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)R2O(i-1,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	3	0
1	$k+1$	2	3	$-(\hat{\epsilon}-i-k-4)\left[\frac{(i-k)(k+1)R2O(i,k+1)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	3	0
-1	$k+1$	2	3	0
-1	$k+1$	3	3	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)Q2E(i-1,k+1)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	3	0
1	k	2	3	0
1	k	3	3	$\left[\frac{(k+5)(\hat{\epsilon}-i+k+2)Q2E(i,k)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	3	0
-1	k	2	3	$\left[\frac{(i-k)(k+5)(i+k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-3)R2O(i-1,k)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 10

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{6(\hat\epsilon+3)(\hat\epsilon-i-k)SO(i,k)}{5(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	$-\left[\frac{(i-k-3)(k+4)(i+k+4)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-2)(\hat\epsilon-i-k)(\hat\epsilon-i+k+5)Q2E(i,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	3	1	0
-1	$k+1$	1	1	$(i-k+2)\left[\frac{(k+4)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k)R2O(i-1,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	1	0
1	k	1	1	$-\left[\frac{(i-k-3)(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k)(\hat\epsilon-i+k+5)R2O(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	0
-1	k	1	1	$-\left[\frac{6(i+k+2)(\hat\epsilon+3)SO(i,k)}{5(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i-1,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	1	$(i+k+8)\left[\frac{(i-k-3)(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k)(\hat\epsilon-i+k+5)Q2E(i-1,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)S2E(i-1,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	3	1	0
1	$k+1$	1	2	0
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+2)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i-k-2)S2E(i,k+1)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)Q2E(i,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	3	2	$-\left[\frac{2(i-k-1)(k+5)(i+k+6)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon-i-k-4)(\hat\epsilon-i-k-2)(\hat\epsilon-i+k+3)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)Q2E(i,k+1)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	2	$-\left[\frac{(i-k-3)(k+2)(i+k+4)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i+k+5)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)R2O(i-1,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	2	$(i-k+4)\left[\frac{(k+5)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon-i-k-2)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon+2)(\hat\epsilon+7)R2O(i-1,k+1)QO(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 10

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	k	1	2	$(\hat{\epsilon}-i+k+4)\left[\frac{(k+4)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+5)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)R2O(i,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	2	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)R2O(i,k)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	0
-1	k	2	2	$\left[\frac{(k+4)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+5)S2E(i-1,k)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)Q2E(i-1,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	3	2	$(i+k+10)\left[\frac{2(i-k-1)(k+1)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}+2)(\hat{\epsilon}+7)Q2E(i-1,k)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	3	0
1	$k+1$	2	3	0
1	$k+1$	3	3	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k-4)Q2E(i,k+1)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	3	0
-1	$k+1$	2	3	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(i+k+6)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2O(i-1,k+1)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	3	0
1	k	2	3	$(\hat{\epsilon}-i+k+2)\left[\frac{(k+5)(i+k+6)R2O(i,k)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	3	0
-1	k	2	3	0
-1	k	3	3	$\left[\frac{(k+5)(i+k+6)Q2E(i-1,k)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+2)QO(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 10

$$Q2E(i,k) = (2i^2 - k^2 + 12i - 5k + 12)\hat{\epsilon}^2 + [(4i+8)k^2 + (20i+40)k - 4i^3 - 28i^2 - 40i]\hat{\epsilon} + 2k^4 + 20k^3 - (4i^2 + 16i - 55)k^2 - (20i^2 + 80i - 25)k + 2i^4 + 16i^3 + 24i^2 - 32i - 12,$$

$$S2E(i,k) = (2i^2 + k^2 + 8i + 5k + 12)\hat{\epsilon}^2 + [(4i+12)k^2 + (20i+60)k - 4i^3 - 16i^2 + 12i + 72]\hat{\epsilon} + 2k^4 + 20k^3 - (4i^2 + 8i - 73)k^2 - (20i^2 + 40i - 115)k + 2i^4 + 8i^3 - 20i^2 - 56i + 60,$$

$$SE(i,k) = 1/2[(2i^2 + k^2 - 2ik + 4i + k + 4)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k-2)(2i-k+4)(i+k+3)\hat{\epsilon} + 2k^4 + 18k^3 - (4i^2 + 8i - 59)k^2 - (18i^2 + 36i - 87)k + 2i^4 + 8i^3 - 16i^2 - 48i + 44],$$

$$QE(i,k) = 1/2[(4i^2 - k^2 - 2ik + 22i - 13k + 20)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k)(i+k+5)(4i-k+7)\hat{\epsilon} + 4k^4 + 42k^3 - (8i^2 + 32i - 121)k^2 - (42i^2 + 168i - 63)k + 4i^4 + 32i^3 + 46i^2 - 72i - 20],$$

$$SO(i,k) = 1/2[(2i^2 + k^2 + 2ik + 16i + 11k + 34)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k-3)(i+k+4)(2i+k+10)\hat{\epsilon} + 2k^4 + 30k^3 - (4i^2 + 8i - 167)k^2 - (30i^2 + 60i - 405)k + 2i^4 + 8i^3 - 52i^2 - 120i + 350],$$

$$QO(i,k) = 1/2[(4i^2 - k^2 + 2ik + 34i + k + 62)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k-1)(i+k+6)(4i+k+13)\hat{\epsilon} + 4k^4 + 54k^3 - (8i^2 + 32i - 229)k^2 - (54i^2 + 216i - 309)k + 4i^4 + 32i^3 + 10i^2 - 216i + 70],$$

$$R2O(i,k) = (i+3)\hat{\epsilon} + k^2 + 5k - i^2 - 4i + 1.$$

表 11 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (\hat\epsilon{+}1\ 2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ 2{+}k_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\hat\epsilon\ 5/2) \\ \hat\epsilon{-}2i\ \ 5/2{+}k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
1	$k+1$	1	1	$\left[\frac{6(i+k+3)(\hat\epsilon+3)SE(i,k)}{5(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i+1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+1)(i+k+3)(i+k+5)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+6)Q2E(i+1,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i+1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	3	1	0
−1	$k+1$	1	1	$-(\hat\epsilon-i+k+1)\left[\frac{(k+4)(i+k+3)(\hat\epsilon+5)R2O(i,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	1	0
1	k	1	1	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(i+k+3)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i+k+6)R2O(i+1,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	0
−1	k	1	1	$\left[\frac{6(\hat\epsilon+3)(\hat\epsilon-i-k+1)SE(i,k)}{5(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	1	$-(\hat\epsilon-i-k-5)\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(i+k+3)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i+k+6)Q2E(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	3	1	0
1	$k+1$	1	2	0
1	$k+1$	2	2	$\left[\frac{(k+2)(i+k+5)(\hat\epsilon+1)S2E(i+1,k+1)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)Q2E(i+1,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	3	2	$-\left[\frac{2(i-k)(k+5)(i+k+5)(i+k+7)(\hat\epsilon+7)(\hat\epsilon-i-k-3)(\hat\epsilon-i+k+4)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)Q2E(i+1,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	$-\left[\frac{(i-k-2)(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i-k-1)(\hat\epsilon-i+k+6)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)R2O(i,k+1)SE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 11

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 偶
-1	$k+1$	2	2	$-(\hat{\epsilon}-i+k-1)\left[\frac{(k+5)(i+k+5)(\hat{\epsilon}+7)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)R2O(i,k+1)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	$-(i-k-1)\left[\frac{(k+4)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}-i-k-1)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)R2O(i+1,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	2	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(i+k+5)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i+k+4)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)R2O(i+1,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	0
-1	k	2	2	$\left[\frac{(k+4)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}-i-k-1)S2E(i,k)QE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)Q2E(i,k)SE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	3	2	$-(\hat{\epsilon}-i-k-7)\left[\frac{2(i-k)(k+1)(i+k+5)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i+k+4)SE(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)Q2E(i,k)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	3	0
1	$k+1$	2	3	0
1	$k+1$	3	3	$\left[\frac{(k+1)(i+k+7)Q2E(i+1,k+1)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	3	0
-1	$k+1$	2	3	$-\left[\frac{(i-k)(k+1)(\hat{\epsilon}-i-k-3)(\hat{\epsilon}-i+k+4)R2O(i,k+1)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	3	0
1	k	2	3	$-(i-k+1)\left[\frac{(k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-3)R2O(i+1,k)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	3	0
-1	k	2	3	0
-1	k	3	3	$\left[\frac{(k+5)(\hat{\epsilon}-i-k-3)Q2E(i,k)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QE(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 11

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(i-k-3)(k+4)(i+k+4)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i-k)R2O(i+1,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	0
−1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{6(\hat\epsilon+3)(\hat\epsilon-i+k+7)SO(i,k)}{5(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i,k+1)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	1	$-(\hat\epsilon-i+k+1)\left[\frac{(i-k-3)(k+4)(i+k+4)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i-k)Q2E(i,k+1)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	3	1	0
1	k	1	1	$-\left[\frac{6(i-k-3)(\hat\epsilon+3)SO(i,k)}{5(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i+1,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-\left[\frac{(i-k-3)(i-k-1)(k+2)(i+k+4)(\hat\epsilon+5)(\hat\epsilon-i-k)(\hat\epsilon-i+k+5)Q2E(i+1,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)S2E(i+1,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	3	1	0
−1	k	1	1	$-(\hat\epsilon-i-k-5)\left[\frac{(i-k-3)(k+2)(\hat\epsilon+5)R2O(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	1	0
1	$k+1$	1	2	$(i+k+5)\left[\frac{(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i+k+5)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)R2O(i+1,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+5)(i+k+6)(\hat\epsilon+7)(\hat\epsilon-i-k-2)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)R2O(i+1,k+1)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	0
−1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(k+2)(\hat\epsilon+1)(\hat\epsilon-i+k+5)S2E(i,k+1)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)Q2E(i,k+1)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	3	2	$-(\hat\epsilon-i+k-1)\left[\frac{2(i-k-1)(k+5)(i+k+6)(\hat\epsilon+7)(\hat\epsilon-i-k-2)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat\epsilon-1)(\hat\epsilon+4)Q2E(i,k+1)QO(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 11

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i-k=$ 奇
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$-\left[\frac{(i-k-1)(k+4)(\hat{\epsilon}+1)S2E(i+1,k)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)Q2E(i+1,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	3	2	$-\left[\frac{2(i-k-1)(i-k+1)(k+1)(i+k+6)(\hat{\epsilon}+7)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)Q2E(i+1,k)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	2	$\left[\frac{(k+4)(i+k+4)(\hat{\epsilon}+1)(\hat{\epsilon}-i-k)(\hat{\epsilon}-i+k+5)QO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)R2O(i,k)SO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	2	$(\hat{\epsilon}-i-k-7)\left[\frac{(i-k-1)(k+1)(\hat{\epsilon}+7)SO(i,k)}{5(k+3)(\hat{\epsilon}-1)(\hat{\epsilon}+4)R2O(i,k)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	1	3	0
1	$k+1$	2	3	$(i+k+7)\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2O(i+1,k+1)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	3	0
−1	$k+1$	2	3	0
−1	$k+1$	3	3	$-\left[\frac{(k+1)(\hat{\epsilon}-i+k+3)Q2E(i,k+1)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	1	3	0
1	k	2	3	0
1	k	3	3	$-\left[\frac{(i-k+1)(k+5)Q2E(i+1,k)}{2(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QO(i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	3	0
−1	k	2	3	$\left[\frac{(k+5)(i+k+6)(\hat{\epsilon}-i-k-2)(\hat{\epsilon}-i+k+3)R2O(i,k)}{(k+3)(\hat{\epsilon}+4)QO(i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 11

$$\begin{aligned}
Q2E(i,k) &= (2i^2 - k^2 + 12i - 5k + 12)\hat{\epsilon}^2 + [(4i+4)k^2 + (20i+20)k - 4i^3 - 20i^2 + 8i + 48]\hat{\epsilon} \\
&\quad + 2k^4 + 20k^3 - (4i^2 + 8i - 67)k^2 - (20i^2 + 40i - 85)k + 2i^4 + 8i^3 - 24i^2 - 64i + 36, \\
S2E(i,k) &= (2i^2 + k^2 + 8i + 5k + 12)\hat{\epsilon}^2 + [(4i+16)k^2 + (20i+80)k - 4i^3 - 8i^2 + 44i + 120]\hat{\epsilon} \\
&\quad + 2k^4 + 20k^3 - (4i^2 - 101)k^2 - (20i^2 - 255)k + 2i^4 - 44i^2 + 252, \\
SE(i,k) &= 1/2[(2i^2 + k^2 - 2ik + 4i + k + 4)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k-2)(2i-k+4)(i+k+3)\hat{\epsilon} + 2k^4 + 18k^3 \\
&\quad - (4i^2 + 8i - 59)k^2 - (18i^2 + 36i - 87)k + 2i^4 + 8i^3 - 16i^2 - 48i + 44], \\
QE(i,k) &= 1/2[(4i^2 - k^2 - 2ik + 22i - 13k + 20)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k)(i+k+5)(4i-k+7)\hat{\epsilon} + 4k^4 + 42k^3 \\
&\quad - (8i^2 + 32i - 121)k^2 - (42i^2 + 168i - 63)k + 4i^4 + 32i^3 + 46i^2 - 72i - 20], \\
SO(i,k) &= 1/2[(2i^2 + k^2 + 2ik + 16i + 11k + 34)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k-3)(i+k+4)(2i+k+10)\hat{\epsilon} + 2k^4 + 30k^3 \\
&\quad - (4i^2 + 8i - 167)k^2 - (30i^2 + 60i - 405)k + 2i^4 + 8i^3 - 52i^2 - 120i + 350], \\
QO(i,k) &= 1/2[(4i^2 - k^2 + 2ik + 34i + k + 62)\hat{\epsilon}^2 - 2(i-k-1)(i+k+6)(4i+k+13)\hat{\epsilon} + 4k^4 + 54k^3 \\
&\quad - (8i^2 + 32i - 229)k^2 - (54i^2 + 216i - 309)k + 4i^4 + 32i^3 + 10i^2 - 216i + 70], \\
R2O(i,k) &= (i+3)\hat{\epsilon} + k^2 + 5k - i^2 - 2i + 7.
\end{aligned}$$

表 12 $\left\langle \begin{array}{cc|c} (1\ 1/2) & (2t\ t) & (2t+1\ \ t-1/2) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ t+k_2 & 2t+1-2i\ \ t-1/2+k\ \beta \end{array} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β	$i+k=$ 偶
1	k	1	$\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(2t+k+1)(2t-i+k)}{(t+k)RE(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	0
1	$k-1$	1	$(t+1)\left[\frac{(i+k-1)(i+k)}{(t+k)RE(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k-1$	1	$-\left[\frac{(i+k)(t+k)(2t-i+k)}{RE(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$(t+1)(2t+2k-1)\left[\frac{(i+k)(2t-i+k+1)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)RE(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	$-\left[\frac{RE(t-1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	$\left[\frac{(1-k)(2t-i+k)(2t-i+k+1)(2t+k+1)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)RE(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k-1$	2	$2(t+1)\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(2t-i+k+1)(2t+k+1)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)RE(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
ϵ_1	k_2	β	$i+k=$ 奇
1	k	1	$2(t+1)\left[\frac{(1-k)(i+k)(2t+k+1)(2t-i+k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)RO(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	$-\left[\frac{(1-k)(2t+k+1)(2t-i+k)(2t-i+k+1)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)RO(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	1	$\left[\frac{RO(t-1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)}\right]^{1/2}$
−1	$k-1$	1	$-(t+1)(2t+2k+1)\left[\frac{(i+k-1)(2t-i+k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k)RO(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	$\left[\frac{(i+k-1)(t+k)(2t-i+k+1)}{RO(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	$-(t+1)\left[\frac{(i+k-1)(i+k)}{(t+k)RO(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k-1$	2	0
−1	$k-1$	2	$\left[\frac{(1-k)(i+k)(2t+k+1)(2t-i+k+1)}{(t+k)RO(t-1/2,i,k)}\right]^{1/2}$

$$RE(t,i,k) = 2(i+k)t^2 + (9k+5i-4)t + k^2 + (6-i)k + 4i - 4,$$
$$RO(t,i,k) = 2(i+k-1)t^2 + (3k+7i-3)t - k^2 + (i+2)k + 5i - 1.$$

表 13 $\left\langle \begin{matrix} (1\ 1/2) & (2t+2\ \ t) \\ \epsilon_1\ 1/2 & \epsilon_2\ t+k_2\ \beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (2t+3\ \ t+1/2) \\ 2t+3-2i\ \ t+1/2+k\ \beta \end{matrix} \right\rangle$

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i+k=$ 偶
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(t+2)RO(t,i,k+1)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	0
−1	$k+1$	1	1	$\left[\frac{(1-k)(t+1)(2t-i+k+2)RE(t,i-1,k+1)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	1	0
1	k	1	1	$\left[\frac{(t+1)(2t+k+2)(2t-i+k+1)RE(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RE(t,i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(i+k)(t+2)(2t+3)(2t-i+k+2)}{(2t+1)(t+k+1)RE(t,i,k)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	1	1	$\left[\frac{(i+k)(t+2)(2t+k+2)RO(t,i-1,k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	k	2	1	0
1	$k+1$	1	2	$-(1-2k)\left[\frac{(i+k)(t+2)(2t+k+3)(2t-i+k+2)(2t-i+k+3)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RO(t,i,k+1)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(-k)(i+k+1)(t+1)RE(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RO(t,i,k+1)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	1	2	$-2(t+2)\left[\frac{(i+k)(i+k-1)(t+1)(2t+k+3)(2t-i+k+3)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RE(t,i-1,k+1)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
−1	$k+1$	2	2	$\left[\frac{(-k)(t+2)(2t-i+k+4)RE(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RE(t,i-1,k+1)}\right]^{1/2}$

续 表 13

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i+k=$ 偶
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$\left[\frac{(t+2)(2t+k+3)(2t-i+k+3)RE(t,i,k)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	$2\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(t+2)(2t+k+2)(2t+k+3)(2t-i+k+2)(2t-i+k+3)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RO(t,i-1,k)RE(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	2	$\left[\frac{(i+k-2)(t+1)(2t+k+3)RE(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RO(t,i-1,k)}\right]^{1/2}$
ϵ_1	k_2	β_2	β	$i+k=$ 奇
1	$k+1$	1	1	$-\left[\frac{(1-k)(i+k+1)(t+1)RO(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RE(t,i,k+1)}\right]^{1/2}$
1	$k+1$	2	1	$-2\left[\frac{(-k)(1-k)(i+k)(2t+k+3)(2t-i+k+2)(2t-i+k+3)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RE(t,i,k+1)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	1	$\left[\frac{(1-k)(t+2)(2t-i+k+2)RO(t,i-1,k+1)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	1	0
1	k	1	1	$\left[\frac{(t+2)(2t+k+2)(2t-i+k+1)RO(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RO(t,i,k)}\right]^{1/2}$
1	k	2	1	$-2(t+2)\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(i+k)(t+1)(2t-i+k+2)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RO(t,i,k)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	1	$\left[\frac{(i+k-2)(t+1)(2t+k+2)RO(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RE(t,i-1,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	2	1	$(4t+2k+5)\left[\frac{(1-k)(i+k-1)(t+2)(2t-i+k+2)(2t-i+k+3)}{(2t+1)(2t+5)(t+k+1)RE(t,i-1,k)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$

续 表 13

ϵ_1	k_2	β_2	β	$i+k=$ 奇
1	$k+1$	1	2	0
1	$k+1$	2	2	$-\left[\frac{(-k)(i+k-1)(t+2)RE(t,i,k+1)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	1	2	$-\left[\frac{(i+k-1)(i+k)(t+2)(2t+3)(2t+k+3)(2t-i+k+3)}{(2t+1)(t+k+1)RO(t,i-1,k+1)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	$k+1$	2	2	$\left[\frac{(-k)(t+1)(2t-i+k+4)RO(t+1/2,i,k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RO(t,i-1,k+1)}\right]^{1/2}$
1	k	1	2	0
1	k	2	2	$\left[\frac{(t+1)(2t+k+3)(2t-i+k+3)RO(t,i,k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$
-1	k	1	2	0
-1	k	2	2	$\left[\frac{(i+k)(t+2)(2t+k+3)RE(t,i-1,k)}{(2t+1)(2t+3)(t+k+1)RO(t+1/2,i,k)}\right]^{1/2}$

$$RE(t,i,k) = 2(i+k)t^2 + (9k+5i-4)t + k^2 + (6-i)k + 4i - 4$$

$$RO(t,i,k) = 2(i+k-1)t^2 + (3k+7i-3)t - k^2 + (i+2)k + 5i - 1$$

第七章　第一类点群及其约化系数

第一类点群是 $SO(3)$ 群的有限子群，其不可约表示和约化系数与 $SO(3)$ 群有密切关系．利用点群的生成元和定义关系，可以方便求得点群的约化系数，本章将给一简单介绍．关于有限群，点群和 $SO(3)$ 群的基本性质可参考群论教科书，此处只在第一节作简单补充，第二节讨论循环群 C_n 与二面体群 D_n, 第三节讨论立方体群 O 与四面体群 T, 第四节讨论二十面体群 I.

7.1　有限群和$SO(3)$ 群性质补充

有限群 G 是由有限个群元组成的集合，在其中定义了群的乘法，所以一个乘法表就决定了一个有限群．但往往由少数群元及其间乘法就可以决定此有限群，这少数群元称为此有限群的生成元，生成元间的乘法称为定义关系．一个有限群的生成元和定义关系可以有不同取法，生成元的个数也可多可少．生成元最多可取为全部群元，乘法表即为其定义关系．而生成元的最少个数则随群不同而不同，如 C_n 只须取一个生成元，而 D_n, T, O 和 I 只须取两个生成元即可.

有限群的每一个表示有等价的酉表示，不等价不可约酉表示满足正交性定理，所有不等价不可约酉表示生成的群函数构成群函数空间的完备系．有限群所有不等价不可约表示的特征标构成类函数空间的完备系，并且满足第一和第二正交关系．有限群 G 不可约表示的特征标表可以用下面方法求出.

设 G 的 n 个元素分成 q 个类，第 i 个类的元素有 n_i 个，设

g_i 为第 i 类的任一元素，可引入类算符为所有该类元素之和，

$$K_i = \frac{n_i}{n} \sum_{x \in G} x g_i x^{-1}. \tag{7.1}$$

由 G 的乘法表可得类算符的乘法，

$$K_i K_j = K_j K_i = \sum_{k=1}^{q} h_{i\,j\,k} K_k, \tag{7.2}$$

其中 $h_{i\,j\,k}$ 称为类乘法常数. 则 G 的 d 维不可约表示 Γ 的特征标满足以下方程

$$n_i n_j \chi_i \chi_j = d \sum_{k=1}^{q} h_{i\,j\,k} n_k \chi_k, \tag{7.3a}$$

其中 χ_i 表第 i 类的特征标. 再利用特征标的正交性，有

$$\sum_{i=1}^{q} n_i |\chi_i|^2 = n. \tag{7.3b}$$

设 $\{y_1, \cdots, y_q\}$ 是一组未知数，取

$$\begin{aligned} \psi_i &= n_i \chi_i, \\ l &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{q} \psi_i y_i, \\ L_{j\,k} &= \sum_{i=1}^{q} h_{i\,j\,k} y_i, \end{aligned}$$

则由 (7.3a) 可得本征方程

$$\sum_{k=1}^{q} L_{j\,k} \psi_k = l \psi_j.$$

解此本征方程并利用 (7.3b), 可以得到所有不等价不可约表示的特征标和维数.

对一些有限群，在各不等价不可约表示的维数 $\mathrm{d}_i, i=1,\cdots,q$ 已知时，由 (7.3) 也有可能直接求得特征标，这样计算比较简单. 第一类点群用 Burnside 定理

$$\sum_{i=1}^{q} \mathrm{d}_i{}^2 = n. \tag{7.4}$$

可以得到全部不等价不可约表示的维数 d_i, 并且可以从 (7.3) 算出其特征标表.

转动群 $SO(3)$ 是李群，它的群元可由李代数 $so(3)$ 的元素经指数映射而得到. 如绕单位向量 $\boldsymbol{n}$ 转 ψ 角的转动为 $\exp(-\mathrm{i}\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})$, 其中 $\boldsymbol{J}$ 为角动量算符. 设 $\boldsymbol{n}$ 的方位角为 θ,ϕ, 则绕任意方向 $\boldsymbol{n}$ 的转动可以用绕 z 轴和 y 轴转动乘积表示出来，

$$\begin{aligned}&\exp(-\mathrm{i}\psi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})\\ =&\exp(-\mathrm{i}\phi J_z)\exp(-\mathrm{i}\theta J_y)\exp(-\mathrm{i}\psi J_z)\exp(\mathrm{i}\theta J_y)\exp(\mathrm{i}\phi J_z).\end{aligned} \tag{7.5}$$

在 $SO(3)$ 群不可约表示 j 中，取表示空间的基为 $|j\ m\rangle$, 则绕 z 轴和绕 y 轴转动的表示矩阵为

$$\begin{aligned}&\langle j\ m'|\exp(-\mathrm{i}\psi J_z)|j\ m\rangle = \delta_{m\ m'}\exp(-\mathrm{i}m\psi),\\ &\langle j\ m'|\exp(-\mathrm{i}\beta J_y)|j\ m\rangle = d^j_{m'\ m}(\beta)\\ &= \sqrt{\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}}\sum_\sigma \begin{pmatrix} j+m \\ j-m'-\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j-m \\ \sigma \end{pmatrix}\\ &\quad\times(-)^{j-m-\sigma}(\cos\beta/2)^{2\sigma+m'+m}(\sin\beta/2)^{2j-2\sigma-m'-m},\end{aligned} \tag{7.6}$$

其中 $\begin{pmatrix} j-m \\ \sigma \end{pmatrix}$ 等为二项式系数. 注意此处的 $d^j_{m'\ m}(\beta)$ 函数为 Edmonds 定义的 $d^j_{m\ m'}(\beta)$. 其特殊值和对称性为

$$d^j_{m'\ m}(\pi) = (-)^{j-m}\delta_{m'\ -m},$$

$$
\begin{aligned}
&d^j_{m'\,m}(-\beta) = d^j_{m\,m'}(\beta), \\
&d^j_{m'\,m}(\beta) = (-)^{m'-m} d^j_{-m'\,-m}(\beta), \\
&d^j_{m'\,m}(\beta) = (-)^{m'-m} d^j_{m\,m'}(\beta).
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

记 $d^j_{m'\,m}(\pi/2) = \Delta^j_{m'\,m}$, 利用

$$
\begin{aligned}
&\exp(-\mathrm{i}\beta J_y) \\
&= \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi J_z}{2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi J_y}{2}\right)\exp(-\mathrm{i}\beta J_z)\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi J_y}{2}\right)\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi J_z}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

可将 $d^j_{m'\,m}(\beta)$ 用 $\Delta^j_{m'\,m}$ 表示出来，在 $j = l$ 为整数时有

$$
d^l_{m'\,m}(\beta) = \Delta^l_{0\,m'}\Delta^l_{0\,m}\kappa(0) + 2\sum_{m''=1}^{l}\Delta^l_{m''\,m'}\Delta^l_{m''\,m}\kappa(m''\beta), \tag{7.9a}
$$

其中

$$
\kappa(x) = \begin{cases}
\cos x, & 若\ m' - m = 0 \bmod(4), \\
\sin x, & 若\ m' - m = 1 \bmod(4), \\
-\cos x, & 若\ m' - m = 2 \bmod(4), \\
-\sin x, & 若\ m' - m = 3 \bmod(4).
\end{cases}
\tag{7.9b}
$$

在 (7.8) 中取 $\beta = 2\pi$, 并从左和右各乘以 $\langle j\ m'|$ 和 $|j\ m\rangle$, 可证

$$
\sum_{m''}\Delta^j_{m''\,m'}\Delta^j_{m''\,m} = \delta_{m'\,m}. \tag{7.10}
$$

对下式从左和右各乘以 $\langle j\ m'|$ 和 $|j\ m\rangle$,

$$
\exp(-\mathrm{i}\pi J_y) = \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi J_y}{2}\right)\exp\left(\frac{-\mathrm{i}\pi J_y}{2}\right),
$$

可证

$$
\sum_{m''}(-)^{m''}\Delta^j_{m''\,m'}\Delta^j_{m''\,m} = (-)^j\delta_{m'\,-m}. \tag{7.11}
$$

当 j 为整数 l 时，利用 (7.10) 和 (7.11), 可得

$$\begin{aligned}\sum_k \Delta^l_{2k+1\ m'}\Delta^l_{2k+1\ m} &= \frac{1}{2}\{\delta_{m'\ m} - (-)^l\delta_{m'\ -m}\},\\ \sum_k \Delta^l_{2k\ m'}\Delta^l_{2k\ m} &= \frac{1}{2}\{\delta_{m'\ m} + (-)^l\delta_{m'\ -m}\},\end{aligned} \tag{7.12}$$

式中求和指标 k 取所有可能的值. 对求和指标进行变换后，可将 (7.12) 式写成 mod(4) 形式，当 $m+m'$ 为偶时有

$$\begin{aligned}\sum_k \Delta^l_{4k+1\ m'}\Delta^l_{4k+1\ m} &= \frac{1}{4}\{\delta_{m'\ m} - (-)^l\delta_{m'\ -m}\},\\ \sum_k \Delta^l_{4k+3\ m'}\Delta^l_{4k+3\ m} &= \frac{1}{4}\{\delta_{m'\ m} - (-)^l\delta_{m'\ -m}\}.\end{aligned} \tag{7.13}$$

当 $m+m'$ 为奇时有

$$\begin{aligned}\sum_k \Delta^l_{4k\ m'}\Delta^l_{4k\ m} &= 0,\\ \sum_k \Delta^l_{4k+2\ m'}\Delta^l_{4k+2\ m} &= 0.\end{aligned} \tag{7.14}$$

在 (7.8) 式中取 $\beta=\pi/2$, 并从左和右各乘以 $\langle j\ m'|$ 和 $|j\ m\rangle$, 可证

$$\sum_{m''}(\mathrm{i})^{m''}\Delta^j_{m''\ m'}\Delta^j_{m''\ m} = (-)^m(\mathrm{i})^{m+m'}\Delta^j_{m'\ m}. \tag{7.15}$$

将其写成 mod(4) 形式，当 $m+m'$ 为奇时有

$$\begin{aligned}\sum_k \Delta^l_{4k+1\ m'}\Delta^l_{4k+1\ m} &= \frac{1}{2}(-)^m(\mathrm{i})^{m+m'-1}\Delta^l_{m'\ m},\\ \sum_k \Delta^l_{4k+3\ m'}\Delta^l_{4k+3\ m} &= \frac{1}{2}(-)^{m-1}(\mathrm{i})^{m+m'-1}\Delta^l_{m'\ m}.\end{aligned} \tag{7.16}$$

当 $m+m'$ 为偶时有

$$
\begin{aligned}
&\sum_k \Delta^l_{4k\ m'} \Delta^l_{4k\ m} \\
&\quad = \frac{1}{4}\{\delta_{m'\ m} + (-)^l \delta_{m'\ -m}\} + \frac{1}{2}(-)^m (\mathrm{i})^{m'+m} \Delta^l_{m'\ m}, \\
&\sum_k \Delta^l_{4k+2\ m'} \Delta^l_{4k+2\ m} \\
&\quad = \frac{1}{4}\{\delta_{m'\ m} + (-)^l \delta_{m'\ -m}\} - \frac{1}{2}(-)^{m'} (\mathrm{i})^{m'+m} \Delta^l_{m'\ m}.
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

$\Delta^l_{m'\ m}$ 函数间的上述关系，在求 $SO(3)$ 群不可约表示对点群的约化系数时颇为有用.

$SO(3)$ 群不可约表示的直积约化和约化系数 (CG 系数) 是已知的. 点群作为有限群, 其表示直积是完全可约的. 设 Γ_1 和 Γ_2 是有限群 G 的不可约表示，其直积可以约化为不可约表示 Γ 的直和，Γ 的重复度为 m_Γ, 即 $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 = \oplus_\Gamma m_\Gamma \Gamma$. 设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ 为 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ 表示空间基的分量指标, 用 β 标记 Γ 出现的重复度，$\beta = 1, \cdots, m_\Gamma$. 定义约化系数为 $\left\langle \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle$, 则

$$
\begin{aligned}
\left| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle &= \sum_{\beta\, \Gamma\, \gamma} \left\langle \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle \left| \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \right\rangle, \\
\left| \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \right\rangle &= \sum_{\gamma_1\, \gamma_2} \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \middle| \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \right\rangle \left| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{7.18}
$$

约化系数满足正交归一性

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\beta\, \Gamma\, \gamma} \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1' & \gamma_2' \end{array} \middle| \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \right\rangle \left\langle \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle \\
&\quad = \delta_{\gamma_1'\ \gamma_1} \delta_{\gamma_2'\ \gamma_2}, \\
&\sum_{\gamma_1\, \gamma_2} \left\langle \beta' \begin{array}{c} \Gamma' \\ \gamma' \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \middle| \beta \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \right\rangle \\
&\quad = \delta_{\beta'\ \beta} \delta_{\Gamma'\ \Gamma} \delta_{\gamma'\ \gamma}.
\end{aligned} \tag{7.19}
$$

设 g_i 是有限群 G 的生成元，计算 $\left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle$，可得约化系数满足的线性齐次方程

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma'} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma' \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle \\
&\quad = \sum_{\gamma_1' \gamma_2'} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1' \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2' \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1' & \gamma_2' \end{array} \right\rangle .
\end{aligned} \tag{7.20}$$

这是不同分量的约化系数满足的线性齐次方程，有 m_Γ 个线性独立的解. 在适当规定相因子，也就是通常所谓取一定惯例后，利用正交归一条件 (7.19) 可以得到约化系数. 但对点群来说，由于它是 $SO(3)$ 群的子群，在 $SO(3)$ 对点群的约化系数已定情况下，由于 $SO(3)$ CG 系数的相因子已采用 Condon-Shortley 惯例，因此点群约化系数的相因子规定应与其一致. 当 $m_\Gamma > 1$ 时，还需对 m_Γ 个线性独立解进行正交化，才能得到满足正交归一条件的解.

设 g_i 是有限群 G 的生成元， ${g_i}^{-1}$ 是 g_i 的逆元素， Γ 是 G 的不可约表示， γ 是标记不可约表示空间基的指标，若对所有的 g_i, 算符组 T^Γ_γ 满足

$$g_i T^\Gamma_\gamma {g_i}^{-1} = \sum_{\gamma'} T^\Gamma_{\gamma'} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma' \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \right\rangle , \tag{7.21}$$

则称算符组 T^Γ_γ 是 G 的秩为 Γ 的不可约张量算符. 对上式从左和右各乘以 $\left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \right|$ 和 $\left| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2 \end{array} \right\rangle$，可求出 $T^{\Gamma_1}_{\gamma_1}$ 的矩阵元满足方程

$$\sum_{\gamma'} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma' \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma' \end{array} \middle| T^{\Gamma_1}_{\gamma_1} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2 \end{array} \right\rangle$$

$$= \sum_{\gamma_1' \gamma_2'} \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1' \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \gamma_1 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2' \end{array} \middle| g_i \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2 \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| T^{\Gamma_1}_{\gamma_1'} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2' \end{array} \right\rangle . \tag{7.22}$$

对确定的表示 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, 从 (7.22) 和 (7.20) 可以看出, 矩阵元和约化系数满足同样的线性齐次方程. 因此在 $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ 是简单约化时, 可以决定矩阵元与约化系数差一常数. 用约化矩阵元 $\langle \Gamma \| T^{\Gamma_1} \| \Gamma_2 \rangle$ 代表具有确定表示的常数, 此时没有代表重复度的量子数 β, 即为有限群的 Wigner-Eckart 定理

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| T^{\Gamma_1}_{\gamma_1} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle \langle \Gamma \| T^{\Gamma_1} \| \Gamma_2 \rangle . \tag{7.23a}$$

在 $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ 是非简单约化时, 由于矩阵元与约化系数满足同样的线性齐次方程, 而约化系数有 m_Γ 个线性独立的解, 因此矩阵元必为此 m_Γ 个约化系数的线性叠加, 即

$$\left\langle \begin{array}{c} \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| T^{\Gamma_1}_{\gamma_1} \middle| \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \gamma_2 \end{array} \right\rangle = \sum_{\beta} \left\langle \begin{array}{c} \beta \ \Gamma \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{array} \right\rangle \langle \beta\, \Gamma \| T^{\Gamma_1} \| \Gamma_2 \rangle . \tag{7.23b}$$

叠加系数 $\langle \beta\, \Gamma \| T^{\Gamma_1} \| \Gamma_2 \rangle$ 也与分量指标无关, 此即为有限群推广的 Wigner-Eckart 定理.

在简化矩阵元计算中, Wigner-Eckart 定理起重要作用.

7.2 循环群 C_n 与二面体群 D_n

第一类点群由绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转 $2\pi/n$ 的转动生成, 向量 $\boldsymbol{n}$ 代表转动轴在 x, y, z 方向的方向数为 n_1, n_2, n_3, 则将此转动记为 $C_n^{n_1\, n_2\, n_3}$, 称为 n_1, n_2, n_3 方向的 n 阶轴. 第一类点群中最简单的群为 C_n, 它由 $C_n^{0\,0\,1}$ 生成, 定义关系为 $(C_n^{0\,0\,1})^n = E$, E 是单位元素. C_n 与

n 阶循环群同构，每个元素为一类，所以类乘法表与乘法表相同. 取 $\omega = \exp(\frac{\mathrm{i}2\pi}{n})$, 其特征标见表 7.1. 其不可约表示均为一维表示，表示矩阵即为其特征标.

已知 $C_n^{0\,0\,1} = \exp(\frac{-\mathrm{i}2\pi J_z}{n})$, 在 $SO(3)$ 群的不可约表示 l 的基 $\left|\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}\right\rangle$ 中，m 就是 J_z 的本征值. 取 A_k 表示空间的基为 $\left|\begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix}\right\rangle$. 考虑不用 $SO(3) \supset SO(2)$ 标记 l 表示空间的态，而用 $SO(3) \supset C_n$ 来标记表示空间的态，这两种标记间的幺正变换系数为

$$\left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \right\rangle = \begin{cases} 1, & k = n - m \bmod(n) + 1, \\ 0, & k \neq n - m \bmod(n) + 1. \end{cases} \tag{7.24}$$

当 $l \leq n$ 时， $SO(3) \supset C_n$ 的标记是完全的，当 $l > n$ 时，有简并存在.

表 7.1 C_n 的特征标表

	E	C_n	C_n^2	$\cdots$	C_n^{n-1}
A_1	1	1	1	$\cdots$	1
A_2	1	ω	ω^2	$\cdots$	ω^{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	1	ω^{n-1}	ω^{2n-2}	$\cdots$	$\omega^{(n-1)^2}$

二面体群 D_n 由 n 阶轴 $C_n^{0\,0\,1}$ 及与其垂直的 2 阶轴 $C_2^{0\,1\,0}$ 生成，定义关系为

$$\begin{aligned} &(C_n^{0\,0\,1})^n = E, \\ &(C_2^{0\,1\,0})^2 = E, \\ &C_n^{0\,0\,1} C_2^{0\,1\,0} C_n^{0\,0\,1} = C_2^{0\,1\,0}. \end{aligned} \tag{7.25}$$

当 n 为偶数或为奇数时， D_n 的类和表示是不同的，下面将分别予以讨论.

D_{2p+1}

D_{2p+1} 共有 $4p+2$ 个元素，$p+2$ 个类，其类算符为

$$
\begin{aligned}
&K_1 = E, \\
&K_{j+1} = (C_{2p+1}^{0\,0\,1})^j + (C_{2p+1}^{0\,0\,1})^{2p+1-j}, \quad j = 1, \cdots, p, \\
&K_{p+2} = \sum_{i=0}^{2p} (C_{2p+1}^{0\,0\,1})^i \, C_2^{0\,1\,0}.
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

利用定义关系可得类乘法常数，再用 (7.3),(7.4)，取 $\phi = \dfrac{2\pi}{(2p+1)}$，可以求出其特征标表如表 7.2. 表中 K_i 下方数为每类元素个数 n_i.

表 7.2 D_{2p+1} 的特征标表

	K_1 1	K_2 2	K_3 2	$\cdots$ $\cdots$	K_{p+1} 2	K_{p+2} $2p+1$
A_1	1	1	1	$\cdots$	1	1
A_2	1	1	1	$\cdots$	1	-1
E_1	2	$2\cos\phi$	$2\cos2\phi$	$\cdots$	$2\cos p\phi$	0
E_2	2	$2\cos2\phi$	$2\cos4\phi$	$\cdots$	$2\cos2p\phi$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_p	2	$2\cos p\phi$	$2\cos2p\phi$	$\cdots$	$2\cos p^2\phi$	0

设一维表示 A_1, A_2, 表示空间的基为 $\left|\begin{array}{c} A_1 \\ a_1 \end{array}\right\rangle$, $\left|\begin{array}{c} A_2 \\ a_2 \end{array}\right\rangle$, 则特征标即为其表示矩阵.

取二维不可约酉表示 E_k 空间的基为 $\left|\begin{array}{c} E_k \\ x_k \end{array}\right\rangle$, $\left|\begin{array}{c} E_k \\ y_k \end{array}\right\rangle$. 与 $SO(3)$ 的表示一致，生成元的表示矩阵可取为

$$C_{2p+1}^{0\,0\,1} = \begin{pmatrix} \exp(-\mathrm{i}k\phi) & 0 \\ 0 & \exp(\mathrm{i}k\phi) \end{pmatrix},$$

$$C_2^{0\,1\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

设 χ^A 和 χ^b 分别为有限群 G 的可约表示 A 和不可约表示 B 的特征标，n 是 G 的阶，G 的第 i 类元素个数为 n_i, 则 A 包含 B 的重复度为

$$m_B^A = \frac{1}{n}\sum_i n_i \chi^A(K_i)^* \chi^B(K_i). \tag{7.28}$$

已知具有相同转动角 θ 的元素构成 $SO(3)$ 群的一个类，在 $SO(3)$ 不可约表示 l 中，其特征标为

$$\chi^l(\theta) = 1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cdots + 2\cos l\theta. \tag{7.29}$$

利用 (7.28) 和下三角恒等式

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cdots + 2\cos l\theta = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{2l+1}{2}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{2}}, & \theta \neq 2\pi\mathrm{i}, \\ 2l+1, & \theta = 2\pi\mathrm{i}, \end{cases} \tag{7.30}$$

可以求出 $SO(3)$ 的不可约表示 l 到 D_{2p+1} 不可约表示的重复度. 当 $j(2p+1) \leq l < (j+1)(2p+1)$, 有

$$m_{A_1}^l = j + \frac{1+(-)^l}{2},$$

$$m_{A_2}^l = j + \frac{1+(-)^{l+1}}{2}, \tag{7.31a}$$

当 $j(2p+1) + k \leq l < (j+1)(2p+1) - k$, 有

$$m_{E_k}^l = 2j+1, \tag{7.31b}$$

当 $(j+1)(2p+1)-k \le l < (j+1)(2p+1)+k$, 有

$$m^l_{E_k} = 2(j+1). \tag{7.31c}$$

为方便起见，将 $SO(3)$ 的不可约表示 l 的基分别记为 $\left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle$, $m=0,1,\cdots,l$, 和 $\left| \begin{matrix} l \\ -m \end{matrix} \right\rangle$, $m=1,\cdots,l$. 则用 $SO(3)\supset SO(2)$ 或用 $SO(3)\supset D_{2p+1}$ 分类不可约表示 l 空间态时，这两种标记间变换为

$$\begin{aligned}
\left| \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k=1,2, \\
\left| \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k=1,\cdots,p, \\
\left| \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k=1,\cdots,p.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

一般不可约表示 l 包含 A_k, E_k 不止一次，下面将在幺正变换系数中 A_k, E_k 前用符号 $0,\alpha,\beta$ 予以标记，以解除重复度引起的简并.

用生成元 $C_{2p+1}^{0\,0\,1}$ 作用于 (7.32), 可得变换系数的选择定则. 用生成元 $C_2^{0\,1\,0}$ 作用于 (7.32), 可得变换系数间的关系. 利用归一化条件可得变换系数绝对值. 适当规定相因子，设下式中 $m\neq 0$, 可得非零变换系数如下：

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0\,A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle &= 1, \quad l=\text{偶}, \\
\left\langle \begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0\,A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle &= 1, \quad l=\text{奇}, \\
\left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha\,A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ \alpha(2p+1)},
\end{aligned} \tag{7.33a}$$

$$\left\langle \begin{array}{c} l \\ -m \end{array} \middle| \begin{array}{c} \alpha\, A_1 \\ a_1 \end{array} \right\rangle = (-)^{l+\alpha} \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{m\ \alpha(2p+1)},$$

$$\left\langle \begin{array}{c} l \\ m \end{array} \middle| \begin{array}{c} \alpha\, A_2 \\ a_2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{m\ \alpha(2p+1)}, \tag{7.33b}$$

$$\left\langle \begin{array}{c} l \\ -m \end{array} \middle| \begin{array}{c} \alpha\, A_2 \\ a_2 \end{array} \right\rangle = (-)^{l+\alpha+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{m\ \alpha(2p+1)},$$

$$\left\langle \begin{array}{c} l \\ m \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta\, E_k \\ x_k \end{array} \right\rangle = \delta_{m\ \beta(2p+1)+k},$$

$$\left\langle \begin{array}{c} l \\ -m \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta\, E_k \\ y_k \end{array} \right\rangle = (-)^{l+\beta+k} \delta_{m\ \beta(2p+1)+k},$$

$$\left\langle \begin{array}{c} l \\ -m \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta\, E_k \\ x_k \end{array} \right\rangle = \delta_{m\ \beta(2p+1)-k}, \tag{7.33c}$$

$$\left\langle \begin{array}{c} l \\ m \end{array} \middle| \begin{array}{c} \beta\, E_k \\ y_k \end{array} \right\rangle = (-)^{l+\beta+k} \delta_{m\ \beta(2p+1)-k},$$

其中 α, β 的取值范围，对不同的 l, k 由式 (7.31) 给出.

D_{2p+1} 有子群 C_{2p+1}，考虑 $D_{2p+1} \supset C_{2p+1}$ 的约化. 为明确起见，将子群的不可约表示用带撇的符号表示. 比较 C_{2p+1} 生成元 $C_{2p+1}^{0\,0\,1}$ 的特征标，可得约化规则为

$$\begin{aligned} &A_k = A'_1, \quad k = 1, 2, \\ &E_k = A'_{k+1} \oplus A'_{2p+2-k}, \quad k = 1, \cdots, p. \end{aligned} \tag{7.34}$$

这是简单约化. 考虑到归一化条件，可取相因子使非零变换系数为

$$\left\langle \begin{array}{c} A_k \\ a_k \end{array} \middle| \begin{array}{c} A'_1 \\ a'_1 \end{array} \right\rangle = 1, \quad k = 1, 2, \tag{7.35a}$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} E_k & A'_{k+1} \\ y_k & a'_{k+1} \end{array} \right\rangle = 1, \quad k=1,\cdots,p,$$
$$\left\langle \begin{array}{c|c} E_k & A'_{2p+2-k} \\ x_k & a'_{2p+2-k} \end{array} \right\rangle = 1, \quad k=1,\cdots,p. \tag{7.35b}$$

用特征标和式 (7.28) 可求出 D_{2p+1} 不可约表示直积约化规则为

$$\begin{aligned} &A_1 \otimes A_k = A_k, \quad k=1,2, \\ &A_2 \otimes A_2 = A_1, \\ &A_j \otimes E_k = E_k, \quad j=1,2, \quad k=1,\cdots,p, \\ &E_k \otimes E_k = \begin{cases} A_1 \oplus A_2 \oplus E_{2k}, & 2k \le p, \\ A_1 \oplus A_2 \oplus E_{2p+1-2k}, & 2k > p, \end{cases} \\ &E_j \otimes E_k = \begin{cases} E_{k-j} \oplus E_{k+j}, & k+j \le p, \\ E_{k-j} \oplus E_{2p+1-k-j}, & k+j > p, \end{cases} \end{aligned} \tag{7.36}$$

其中 $k > j$ 对 $E_j \otimes E_k$.

对 $A_j \otimes A_k$ 可取直积约化系数为 1. 其他约化系数可用下法求出，由约化系数满足的方程 (7.20), 取 g_i 为 $C_{2p+1}^{0\,0\,1}$, 可得约化系数的选择定则，取 g_i 为 $C_2^{0\,1\,0}$, 可得约化系数间关系，再考虑归一化，适当选择相因子，可得下面非零直积约化系数

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} A_1 & E_k & E_k \\ a_1 & x_k & x_k \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} A_1 & E_k & E_k \\ a_1 & y_k & y_k \end{array} \right\rangle = 1,$$
$$\left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & E_k & E_k \\ a_2 & x_k & x_k \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & E_k & E_k \\ a_2 & y_k & y_k \end{array} \right\rangle = 1, \tag{7.37a}$$

当 $2k \le p$ 时，有下面非零直积约化系数

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & E_{2k} \\ x_k & x_k & x_{2k} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & E_{2k} \\ y_k & y_k & y_{2k} \end{array} \right\rangle = 1,$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & A_1 \\ x_k & y_k & a_1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & A_1 \\ y_k & x_k & a_1 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.37b}$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & A_2 \\ x_k & y_k & a_2 \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & A_2 \\ y_k & x_k & a_2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

当 $2k > p$ 时，有下面非零直积约化系数与 (7.37b) 不同

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & E_{2p+1-2k} \\ x_k & x_k & y_{2p+1-2k} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_k & E_{2p+1-2k} \\ y_k & y_k & x_{2p+1-2k} \end{array} \right\rangle = 1, \tag{7.37c}$$

当 $k + j \leq p$ 时，有下面非零直积约化系数

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k-j} \\ x_k & y_j & x_{k-j} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k-j} \\ y_k & x_j & y_{k-j} \end{array} \right\rangle = 1,$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k+j} \\ x_k & x_j & x_{k+j} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k+j} \\ y_k & y_j & y_{k+j} \end{array} \right\rangle = 1, \tag{7.37d}$$

当 $k + j > p$ 时，有下面非零直积约化系数与 (7.37d) 不同

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{2p+1-k-j} \\ x_k & x_j & y_{2p+1-k-j} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{2p+1-k-j} \\ y_k & y_j & x_{2p+1-k-j} \end{array} \right\rangle = 1. \tag{7.37e}$$

D_{2p}

D_{2p} 共有 $4p$ 个元素， $p+3$ 个类，其类算符为

$$
\begin{aligned}
&K_1 = E, \\
&K_{j+1} = (C_{2p}^{0\,0\,1})^j + (C_{2p}^{0\,0\,1})^{2p-j}, \quad j = 1, \cdots, p-1, \\
&K_{p+1} = (C_{2p}^{0\,0\,1})^p, \\
&K_{p+2} = \sum_{i=0}^{p-1} (C_{2p}^{0\,0\,1})^{2i} C_2^{0\,1\,0}, \\
&K_{p+3} = \sum_{i=0}^{p-1} (C_{2p}^{0\,0\,1})^{2i+1} C_2^{0\,1\,0},
\end{aligned} \tag{7.38}
$$

用定义关系可以求出其类乘法常数，再用 (7.3),(7.4), 取 $\phi = \dfrac{\pi}{p}$, 可以求出其特征标表 7.3, 表中 K_i 下方数为 K_i 类元素个数.

设 A_1, A_2, B_1 和 B_2 一维表示空间的基为 $\left| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle$, $\left| \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle$, $\left| \begin{matrix} B_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\rangle$ 和 $\left| \begin{matrix} B_2 \\ b_2 \end{matrix} \right\rangle$, 则生成元 $C_{2p}^{0\,0\,1}, C_2^{0\,1\,0}$ 的表示矩阵元即其特征标.

取二维不可约酉表示 E_k 空间的基为 $\left| \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle$, $\left| \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle$. 与 $SO(3)$ 的表示一致，生成元的表示矩阵可取为

$$
\begin{aligned}
C_{2p}^{0\,0\,1} &= \begin{pmatrix} \exp(-\mathrm{i}k\phi) & 0 \\ 0 & \exp(\mathrm{i}k\phi) \end{pmatrix}, \\
C_2^{0\,1\,0} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.39}
$$

利用 (7.28) 和 (7.30), 可以求出 $SO(3)$ 的不可约表示 l 到 D_{2p} 不可约表示的重复度. 当 $j2p \le l < (j+1)2p$, 有

$$
\begin{aligned}
m_{A_1}^l &= j + \frac{1+(-)^l}{2}, \\
m_{A_2}^l &= j + \frac{1+(-)^{l+1}}{2},
\end{aligned} \tag{7.40a}
$$

表 7.3 D_{2p} 的特征标表

	K_1	K_2	K_3	$\cdots$	K_p	K_{p+1}	K_{p+2}	K_{p+3}
	1	2	2	$\cdots$	2	1	p	p
A_1	1	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
A_2	1	1	1	$\cdots$	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	$\cdots$	$(-)^{p-1}$	$(-)^p$	1	-1
B_2	1	-1	1	$\cdots$	$(-)^{p-1}$	$(-)^p$	-1	1
E_1	2	$2\cos\phi$	$2\cos 2\phi$	$\cdots$	$2\cos(p-1)\phi$	$2\cos p\phi$	0	0
E_2	2	$2\cos 2\phi$	$2\cos 4\phi$	$\cdots$	$2\cos(p-1)2\phi$	$2\cos p2\phi$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_{p-1}	2	$2\cos(p-1)\phi$	$2\cos(p-1)2\phi$	$\cdots$	$2\cos(p-1)^{\phi}$	$2\cos p(p-1)\phi$	0	0

$$m^l_{B_1} = \begin{cases} 0, & l < p, \\ j+1, & (2j+1)p \le l < (2j+3)p, \end{cases}$$
$$m^l_{B_2} = \begin{cases} 0, & l < p, \\ j+1, & (2j+1)p \le l < (2j+3)p, \end{cases} \tag{7.40b}$$

和

$$m^l_{E_k} = \begin{cases} 2j+1, & j2p+k \le l < (j+1)2p-k, \\ 2(j+1), & (j+1)2p-k \le l < (j+1)2p+k. \end{cases} \tag{7.40c}$$

用 $SO(3) \supset SO(2)$ 或用 $SO(3) \supset D_{2p}$ 分类不可约表示 l 空间态时，这两种标记间幺正变换为

$$\begin{aligned}
\left| \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k=1,2, \\
\left| \begin{matrix} B_k \\ b_k \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_k \\ b_k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k=1,2, \\
\left| \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k=1,\cdots,p-1, \\
\left| \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k=1,\cdots,p-1.
\end{aligned} \tag{7.41}$$

由于 $SO(3) \supset D_{2p}$ 一般不是简单约化，下面将在幺正变换系数中引入附加量子数 $0, \alpha, \beta$, 以解除重复度引起的简并.

用生成元 $C_{2p}^{0\,0\,1}$ 作用于 (7.41), 可得变换系数的选择定则. 用生成元 $C_2^{0\,1\,0}$ 作用于 (7.41), 可得变换系数间的关系. 适当规定相因子，再利用归一化条件，设下式中 $m \neq 0$, 可得非零变换系数如下：

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & 0\ A_1 \\ 0 & a_1 \end{array} \right\rangle = 1, \quad l = \text{偶},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & 0\ A_2 \\ 0 & a_2 \end{array} \right\rangle = 1, \quad l = \text{奇},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ A_1 \\ m & a_1 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ \alpha 2p},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ A_1 \\ -m & a_1 \end{array} \right\rangle = (-)^l \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ \alpha 2p},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ A_2 \\ m & a_2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ \alpha 2p},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ A_2 \\ -m & a_2 \end{array} \right\rangle = (-)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ \alpha 2p}, \tag{7.42a}$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ B_1 \\ m & b_1 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ (2\alpha+1)p},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ B_1 \\ -m & b_1 \end{array} \right\rangle = (-)^{l+p} \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ (2\alpha+1)p},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ B_2 \\ m & b_2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ (2\alpha+1)p},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\ B_2 \\ -m & b_2 \end{array} \right\rangle = (-)^{l+p+1} \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m\ (2\alpha+1)p},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \beta\ E_k \\ m & x_k \end{array} \right\rangle = \delta_{m\ \beta 2p+k},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \beta\ E_k \\ -m & y_k \end{array} \right\rangle = (-)^{l+k}\delta_{m\ \beta 2p+k}, \tag{7.42b}$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} l & \beta\ E_k \\ -m & x_k \end{array} \right\rangle = \delta_{m\ \beta 2p-k},$$

$$\left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle = (-)^{l+k} \delta_{m\, \beta 2p-k}. \tag{7.42c}$$

D_{2p} 有子群 C_{2p}, 考虑 $D_{2p} \supset C_{2p}$ 的约化. 为明确起见, $C_{2p}^{0\,0\,1}$ 的特征标见表 7.1, 将子群的不可约表示用带撇的符号表示, 可得约化规则为

$$\begin{aligned} &A_k = A'_1, \ \ B_k = A'_{p+1}, \ \ k = 1,2, \\ &E_k = A'_{k+1} \oplus A'_{2p+1-k}, \ \ k = 1, \cdots, p-1, \end{aligned} \tag{7.43}$$

这是简单约化. 考虑到归一化条件, 可取相因子使非零变换系数为

$$\begin{gathered} \left\langle \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A'_1 \\ a'_1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} B_k \\ b_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A'_{p+1} \\ a'_{p+1} \end{matrix} \right\rangle = 1, \ \ k = 1,2, \\ \left\langle \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A'_{k+1} \\ a'_{k+1} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A'_{2p+1-k} \\ a'_{2p+1-k} \end{matrix} \right\rangle = 1, \ \ k = 1, \cdots, p-1. \end{gathered} \tag{7.44}$$

D_{2p} 包含子群 D_p, 当 p 为奇或为偶时, $D_{2p} \supset D_p$ 的约化规则和变换系数均不相同. 现先讨论 p 为奇数情况. D_p 有 $2p$ 个元素, $(p+3)/2$ 个类, 利用表 7.2 可以方便写出其特征标表. 将子群的不可约表示用带撇的符号表示, 可得约化规则为

$$\begin{aligned} &A_k = A'_k, \ \ B_k = A'_k, \ \ k = 1,2, \\ &E_k = \begin{cases} E'_k, \ \ k \le (p-1)/2, \\ E'_{p-k}, \ \ k > (p-1)/2. \end{cases} \end{aligned} \tag{7.45}$$

由于 A_k, B_k 是一维的, 所以可取相因子使其幺正变换系数为 1. E_k 的非零幺正变换系数可取为

$$
\left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_k \\ x_k & x'_k \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_k \\ y_k & y'_k \end{array} \right\rangle = 1, \quad k \leq (p-1)/2,
$$

$$
\left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_{p-k} \\ x_k & x'_{p-k} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_{p-k} \\ y_k & y'_{p-k} \end{array} \right\rangle = 1, \quad k > (p-1)/2. \tag{7.46}
$$

现看 p 为偶数情况. D_p 有 $2p$ 个元素, $p/2+3$ 个类, 利用表 7.3 可以方便写出其特征标表. 将子群的不可约表示用带撇的符号表示, 可得约化规则为

$$
\begin{aligned}
&A_k = A'_k, \quad B_k = A'_k, \quad k = 1,2, \\
&E_k = \begin{cases} E'_k, & k < p/2, \\ E'_{p-k}, & k > p/2, \\ B'_1 \oplus B'_2, & k = p/2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.47}
$$

适当选择相因子, 一维表示之间的幺正变换系数可取为 1. E_k 的非零幺正变换系数可取为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_k \\ x_k & x'_k \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_k \\ y_k & y'_k \end{array} \right\rangle = 1, \quad k < p/2, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_{p-k} \\ x_k & x'_{p-k} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} E_k & E'_{p-k} \\ y_k & y'_{p-k} \end{array} \right\rangle = 1, \quad k > p, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} E_{p/2} & B'_1 \\ x_{p/2} & b'_1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} E_{p/2} & B'_1 \\ y_{p/2} & b'_1 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} E_{p/2} & B'_2 \\ x_{p/2} & b'_2 \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{c|c} E_{p/2} & B'_2 \\ y_{p/2} & b'_2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{7.48}
$$

现讨论 D_{2p} 不可约表示直积. 规定 $k > j$, 可求出 D_{2p} 不可约表示直积约化规则为

$$
\begin{aligned}
&A_1 \otimes A_k = A_k,\ \ A_1 \otimes B_k = B_k,\ \ k = 1,2,\\
&A_2 \otimes A_2 = A_1,\\
&A_2 \otimes B_1 = B_2,\ \ A_2 \otimes B_2 = B_1,\\
&A_j \otimes E_k = E_k,\ \ j = 1,2,\ \ k = 1,\cdots,p-1,\\
&B_1 \otimes B_k = A_k,\ \ k = 1,2,\\
&B_2 \otimes B_2 = A_1,\\
&B_j \otimes E_k = E_{p-k},\ \ j = 1,2,\ \ k = 1,\cdots,p-1,
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

$$
E_k \otimes E_k = \begin{cases}
A_1 \oplus A_2 \oplus B_1 \oplus B_2, & p = \text{偶},\ k = p/2,\\
A_1 \oplus A_2 \oplus E_{2k}, & \begin{cases} p = \text{奇},\ k \le (p-1)/2,\\ p = \text{偶},\ k \le p/2 - 1,\end{cases}\\
A_1 \oplus A_2 \oplus E_{2p-2k}, & \begin{cases} p = \text{奇},\ k \ge 2(p+1),\\ p = \text{偶},\ k \ge p/2 + 1,\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
E_k \otimes E_j = \begin{cases}
B_1 \oplus B_2 \oplus E_{p-2k}, & j = p-k, \begin{cases} k = \text{偶},\ k < p/2,\\ p = \text{奇}, k \le (p-1)/2,\end{cases}\\
B_1 \oplus B_2 \oplus E_{2k-p}, & j = p-k, \begin{cases} p = \text{偶},\ k > p/2,\\ p = \text{奇}, k \ge (p+1)/2,\end{cases}\\
E_{k-j} \oplus E_{k+j}, & k+j < p,\\
E_{k-j} \oplus E_{2p-k-j}, & k+j > p,
\end{cases}
$$

由约化系数满足的方程 (7.20), 取 g_i 为 $C_{2p}^{0\,0\,1}$, 可得约化系数的选择定则, 取 g_i 为 $C_2^{0\,1\,0}$, 可得约化系数间关系, 适当选择相因子, 再考虑归一化, 对 $A_j \otimes A_k$, $A_j \otimes B_k$, $B_j \otimes B_k$, 可取直积约化系数为 1. 对 $A_j \otimes K_k$, $B_j \otimes E_k$, 可得下面非零直积约化系数

$$
\left\langle \begin{matrix} A_1 & E_k \\ a_1 & x_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} A_1 & E_k \\ a_1 & y_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle = 1,
$$

$$
\tag{7.50a}
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} A_2 & E_k \\ a_2 & x_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} A_2 & E_k \\ a_2 & y_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_k \\ y_k \end{matrix} \right\rangle = 1,
$$

$$\left\langle\begin{matrix} B_1 & E_k \\ b_1 & x_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} E_{p-k} \\ y_{p-k} \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} B_1 & E_k \\ b_1 & y_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} E_{p-k} \\ x_{p-k} \end{matrix}\right\rangle = 1,$$

$$\left\langle\begin{matrix} B_2 & E_k \\ b_2 & x_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} E_{p-k} \\ y_{p-k} \end{matrix}\right\rangle = -\left\langle\begin{matrix} B_2 & E_k \\ b_2 & y_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} E_{p-k} \\ x_{p-k} \end{matrix}\right\rangle = -1, \tag{7.50b}$$

对 $E_{p/2} \otimes E_{p/2}$, 有下面非零直积约化系数,

$$\left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ x_{p/2} & y_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ y_{p/2} & x_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ x_{p/2} & x_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} B_1 \\ b_1 \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ y_{p/2} & y_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} B_1 \\ b_1 \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ x_{p/2} & y_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix}\right\rangle = -\left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ y_{p/2} & x_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.50c}$$

$$\left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ x_{p/2} & x_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} B_2 \\ b_2 \end{matrix}\right\rangle = -\left\langle\begin{matrix} E_{p/2} & E_{p/2} \\ y_{p/2} & y_{p/2} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} B_2 \\ b_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

对 $E_k \otimes E_k$, 有下面非零直积约化系数,

$$\left\langle\begin{matrix} E_k & E_k \\ x_k & y_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} E_k & E_k \\ y_k & x_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle\begin{matrix} E_k & E_k \\ x_k & y_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix}\right\rangle = -\left\langle\begin{matrix} E_k & E_k \\ y_k & x_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{7.50d}$$

当 $p =$ 奇, $k \leq (p-1)/2$, 或 $p =$ 偶, $k \leq p/2 - 1$ 时, 有下面非零直积约化系数

$$\left\langle\begin{matrix} E_k & E_k \\ x_k & x_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} E_{2k} \\ x_{2k} \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} E_k & E_k \\ y_k & y_k \end{matrix}\middle|\begin{matrix} E_{2k} \\ y_{2k} \end{matrix}\right\rangle = 1, \tag{7.50e}$$

$$\left\langle \begin{matrix} E_k & E_k \\ x_k & y_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E_k & E_k \\ y_k & x_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} E_k & E_k \\ x_k & y_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} E_k & E_k \\ y_k & x_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{7.50f}$$

当 $p=$ 奇, $k \geq (p+1)/2$, 或 $p=$ 偶, $k \geq p/2+1$ 时，有下面非零直积约化系数与 (7.50f) 不同

$$\left\langle \begin{matrix} E_k & E_k \\ x_k & x_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_{2p-2k} \\ y_{2p-2k} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E_k & E_k \\ y_k & y_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_{2p-2k} \\ x_{2p-2k} \end{matrix} \right\rangle = 1, \tag{7.50g}$$

对 $E_k \otimes E_{p-k}$, $k=$ 偶, $k < p/2$, $p=$ 奇, $k \leq (p-1)/2$, 有下面非零直积约化系数

$$\left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ x_k & x_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ y_k & y_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_1 \\ b_1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ x_k & x_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_2 \\ b_2 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ y_k & y_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_2 \\ b_2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.50h}$$

$$\left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ x_k & y_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_{p-2k} \\ y_{p-2k} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ y_k & x_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_{p-2k} \\ x_{p-2k} \end{matrix} \right\rangle = 1,$$

$k=$ 偶, $k > p/2$, $p=$ 奇, $k \geq (p+1)/2$, 有下面非零直积约化系数与 (7.50h) 不同

$$\left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ x_k & y_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_{2k-p} \\ x_{2k-p} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E_k & E_{p-k} \\ y_k & x_{p-k} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_{2k-p} \\ y_{2k-p} \end{matrix} \right\rangle = 1, \tag{7.50i}$$

取 $k > j$, 当 $k+j < p$ 时，有下面非零直积约化系数

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k-j} \\ x_k & y_j & x_{k-j} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k-j} \\ y_k & x_j & y_{k-j} \end{array} \right\rangle = 1,$$
$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k+j} \\ x_k & x_j & x_{k+j} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{k+j} \\ y_k & y_j & y_{k+j} \end{array} \right\rangle = 1, \quad (7.50j)$$

当 $k+j>p$ 时，有下面非零直积约化系数与 (7.50j) 不同

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{2p-k-j} \\ x_k & x_j & y_{2p-k-j} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E_k & E_j & E_{2p-k-j} \\ y_k & y_j & x_{2p-k-j} \end{array} \right\rangle = 1, \quad (7.50k)$$

7.3 立方体群 O 和四面体群 T

O 和 T 分别为正立方体和正四面体的不变群，见图 7.1 的实

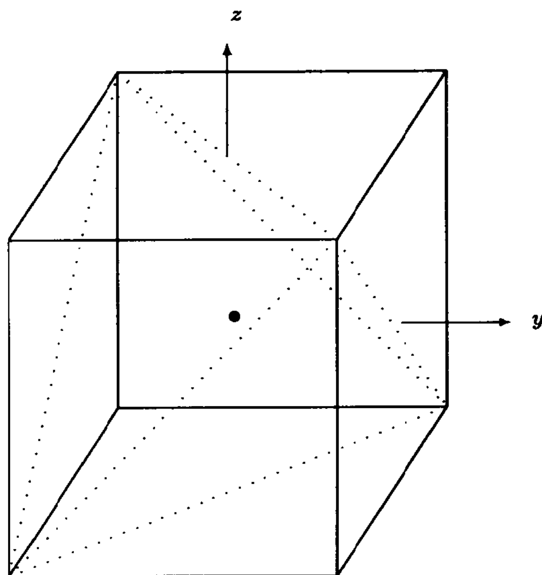


图 7.1 正立方体和正四面体图

线和虚线图. 先讨论立方体群. O 有三个四阶轴 $C_4^{0\,0\,1}, C_4^{0\,1\,0}$, $C_4^{1\,0\,0}$, 四个三阶轴 $C_3^{1\,1\,1}, C_3^{1\,-1\,1}, C_3^{-1\,1\,1}, C_3^{-1\,-1\,1}$, 和六个二阶轴 $C_2^{1\,1\,0}, C_2^{1\,0\,1}, C_2^{0\,1\,1}, C_2^{0\,-1\,1}, C_2^{-1\,1\,0}, C_2^{-1\,0\,1}$. 可以取 $C_4^{0\,0\,1}, C_4^{0\,1\,0}$ 为 O 的生成元, 定义关系为

$$\begin{aligned}
&(C_4^{0\,0\,1})^4 = E, \\
&(C_4^{0\,1\,0})^4 = E, \\
&C_4^{0\,0\,1}C_4^{0\,1\,0}C_4^{0\,0\,1} = C_4^{0\,1\,0}C_4^{0\,0\,1}C_4^{0\,1\,0}.
\end{aligned} \tag{7.51}$$

O 共有五个类, 其类算符为

$$\begin{aligned}
K_1 &= E, \\
K_2 &= (C_4^{1\,0\,0})^2 + (C_4^{0\,1\,0})^2 + (C_4^{0\,0\,1})^2, \\
K_3 &= C_4^{1\,0\,0} + C_4^{0\,1\,0} + C_4^{0\,0\,1} + (C_4^{1\,0\,0})^3 + (C_4^{0\,1\,0})^3 + (C_4^{0\,0\,1})^3, \\
K_4 &= C_2^{1\,1\,0} + C_2^{1\,0\,1} + C_2^{0\,1\,1} + C_2^{0\,-1\,1} + C_2^{-1\,1\,0} + C_2^{-1\,0\,1}, \\
K_5 &= C_3^{1\,1\,1} + C_3^{1\,-1\,1} + C_3^{-1\,1\,1} + C_3^{-1\,-1\,1} + (C_3^{1\,1\,1})^2 \\
&\quad + (C_3^{1\,-1\,1})^2 + (C_3^{-1\,1\,1})^2 + (C_3^{-1\,-1\,1})^2.
\end{aligned} \tag{7.52}$$

可以证明 O 与对称群 S_4 同构, 表 7.4 给出 O 的轴与 S_4 元素间对应关系.

表 7.4 O 与 S_4 元素间的同构对应

O	$C_4^{0\,0\,1}$	$C_4^{0\,1\,0}$	$C_4^{1\,0\,0}$	$C_3^{1\,1\,1}$	$C_3^{-1\,1\,1}$	$C_3^{1\,-1\,1}$	$C_3^{-1\,-1\,1}$
S_4	(1234)	(1423)	(1243)	(132)	(243)	(142)	(143)
O	$C_2^{1\,1\,0}$	$C_2^{1\,0\,1}$	$C_2^{0\,1\,1}$	$C_2^{0\,-1\,1}$	$C_2^{-1\,1\,0}$	$C_2^{-1\,0\,1}$	···
S_4	(24)	(34)	(14)	(23)	(13)	(12)	···

由 S_4 的乘法可以容易算出 O 的乘法表和类乘法常数, 如

$$K_2K_2 = 3K_1 + 2K_2,\quad K_2K_3 = K_3 + 2K_4,$$

$$K_2K_4 = 2K_3 + K_4, \quad K_2K_5 = 3K_5,$$
$$K_3K_3 = 6K_1 + 2K_3 + 3K_5, \quad \cdots$$

利用式 (7.3),(7.4), 可以求出其特征标表 7.5. 表中 K_i 下方数是 K_i 类元素个数 n_i.

表 7.5 O 的特征标表

	K_1 1	K_2 3	K_3 6	K_4 6	K_5 8
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	−1	−1	1
E	2	2	0	0	−1
T_1	3	−1	1	−1	0
T_2	3	−1	−1	1	0

设一维表示 A_1, A_2, 表示空间的基为 $\left| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle$, 则生成元 $C_4^{0\,0\,1}, C_4^{0\,1\,0}$ 的表示矩阵元即其特征标.

取二维不可约西表示 E 空间的基为 $\left| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle$. 与转动群 $SO(3)$ 的表示一致, 生成元的表示矩阵可取为

$$\begin{aligned} C_4^{0\,0\,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ C_4^{0\,1\,0} &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.53}$$

取三维不可约西表示 T_i 空间的基为 $\left| \begin{matrix} T_i \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} T_i \\ 0 \end{matrix} \right\rangle, \left| \begin{matrix} T_i \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle$, $i = 1, 2$, 与 $SO(3)$ 的表示一致, T_1 表示中, 生成元的表示矩阵为

$$
C_4^{0\,0\,1}=\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix},
$$

$$
C_4^{0\,1\,0}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{7.54}
$$

T_2 表示中，生成元的表示矩阵为

$$
C_4^{0\,0\,1}=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},
$$

$$
C_4^{0\,1\,0}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}. \tag{7.55}
$$

利用 (7.28), 可以求出 $SO(3)$ 的不可约表示 l 到 O 不可约表示的重复度，结果见表 7.6. 表中每一行给出 l 值，l 表成 $12i+k$ 形式.

用 $SO(3)\supset SO(2)$ 或用 $SO(3)\supset O$ 分类不可约表示 l 空间态时，这两种标记间幺正变换系数可以用下法求出. 如 O 的不可约表示 T_1,

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}\right\rangle, \\
\left|\begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}\right\rangle, \\
\left|\begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix}\right\rangle &= \sum_{m=-l}^{l} \left\langle\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} l \\ m \end{matrix}\right\rangle.
\end{aligned} \tag{7.56a}
$$

用生成元 $C_4^{0\,0\,1}$ 作用于 (7.55a), 可得变换系数的选择定则，即

表 7.6　$SO(3)\supset O$ 的重复度表

l	A_1	A_2	E	T_1	T_2
$12i$	$i+1$	i	$2i$	$3i$	$3i$
$12i+1$	i	i	$2i$	$3i+1$	$3i$
$12i+2$	i	i	$2i+1$	$3i$	$3i+1$
$12i+3$	i	$i+1$	$2i$	$3i+1$	$3i+1$
$12i+4$	$i+1$	i	$2i+1$	$3i+1$	$3i+1$
$12i+5$	i	i	$2i+1$	$3i+2$	$3i+1$
$12i+6$	$i+1$	$i+1$	$2i+1$	$3i+1$	$3i+2$
$12i+7$	i	$i+1$	$2i+1$	$3i+2$	$3i+2$
$12i+8$	$i+1$	i	$2i+2$	$3i+2$	$3i+2$
$12i+9$	$i+1$	$i+1$	$2i+1$	$3i+3$	$3i+2$
$12i+10$	$i+1$	$i+1$	$2i+2$	$3i+2$	$3i+3$
$12i+11$	i	$i+1$	$2i+2$	$3i+3$	$3i+3$

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle &= \sum_{\mu}\left\langle\begin{matrix} l \\ 4\mu+1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix} l \\ 4\mu+1 \end{matrix}\right\rangle, \\
\left|\begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle &= \sum_{\mu}\left\langle\begin{matrix} l \\ 4\mu \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix} l \\ 4\mu \end{matrix}\right\rangle, \\
\left|\begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix}\right\rangle &= \sum_{\mu}\left\langle\begin{matrix} l \\ 4\mu+3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix}\right\rangle\left|\begin{matrix} l \\ 4\mu+3 \end{matrix}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{7.56b}
$$

用生成元 $C_4^{0\,1\,0}$ 作用于 (7.55b), 可得变换系数满足的方程, 如

$$
\begin{aligned}
\left\langle\begin{matrix} l \\ 4\mu+1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle &= 2\sum_{\mu'}\left\langle\begin{matrix} l \\ 4\mu'+1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle \Delta^l_{4\mu+1\ 4\mu'+1}, \\
\left\langle\begin{matrix} l \\ 4\mu \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix}\right\rangle &= -\sqrt{2}\sum_{\mu'}\left\langle\begin{matrix} l \\ 4\mu'+1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle \Delta^l_{4\mu\ 4\mu'+1},
\end{aligned}
\tag{7.57a}
$$

$$\left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu+3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = 2\sum_{\mu'} \left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu'+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \Delta^l_{4\mu+3\ 4\mu'+1}, \tag{7.57b}$$

$$\sum_{\mu'} \left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu'+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \Delta^l_{4\mu+2\ 4\mu'+1} = 0,$$

由于 $SO(3) \supset O$ 不是简单约化的，下面将在约化系数中 A_k, E, T_k 的前面引入附加量子数 $0, \alpha, \beta$，以解除重复度引起的简并．利用 (7.13),(7.14),(7.16),(7.17)，考虑归一化条件，当 l 为奇数时，简并量子数可能为 0，有

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0\,T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{2}\Delta^l_{4\mu+1\ 0}, \\ &\left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0\,T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \delta_{4\mu\ 0}, \\ &\left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu+3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0\,T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{2}\Delta^l_{4\mu+3\ 0}, \end{aligned} \tag{7.58a}$$

不论 l 为奇或为偶，α 取小于或等于 $l/4$ 的正整数，有

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha\,T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = 2\Delta^l_{4\mu+1\ 4\alpha}, \\ &\left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha\,T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1/\sqrt{2}(\delta_{4\mu\ 4\alpha} - (-)^l\delta_{4\mu\ -4\alpha}), \\ &\left\langle \begin{matrix} l \\ 4\mu+3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha\,T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = -2\Delta^l_{4\mu+3\ 4\alpha}. \end{aligned} \tag{7.58b}$$

式 (7.58) 将变换系数用已知的 $\Delta^l_{m\ m'}$ 函数表示出来，对实际计算将是很方便的．

同理可得 T_2 的幺正变换系数为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\, T_2 \\ 4\mu+3 & 1 \end{array} \right\rangle = 2\Delta^l_{4\mu+3\ 4\alpha+2}, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\, T_2 \\ 4\mu+2 & 0 \end{array} \right\rangle = -1/\sqrt{2}(\delta_{4\mu+2\ 4\alpha+2} - (-)^l \delta_{4\mu+2\ -4\alpha-2}), \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\, T_2 \\ 4\mu+1 & \bar{1} \end{array} \right\rangle = -2\Delta^l_{4\mu+1\ 4\alpha+2},
\end{aligned} \tag{7.59}
$$

其中 α 取小于或等于 $(l-2)/4$ 的非负整数.

同理 A_1, A_2, 和 E 的幺正变换系数可以表达成

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\, A_1 \\ 4\mu & a_1 \end{array} \right\rangle = c_1\{\delta_{4\mu\ 4\alpha} + (-)^l \delta_{4\mu\ -4\alpha} + 4\Delta^l_{4\mu\ 4\alpha}\}, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\, A_2 \\ 4\mu+2 & a_2 \end{array} \right\rangle \\
&= c_2\{\delta_{4\mu+2\ 4\alpha+2} + (-)^l \delta_{4\mu+2\ -4\alpha-2} - 4\Delta^l_{4\mu+2\ 4\alpha+2}\},
\end{aligned} \tag{7.60a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\, E \\ 4\mu+2 & \epsilon \end{array} \right\rangle \\
&= c_3\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}(\delta_{4\mu+2\ 4\alpha+2} + (-)^l \delta_{4\mu+2\ -4\alpha-2} + 2\Delta^l_{4\mu+2\ 4\alpha+2}) + \Delta^l_{4\mu+2\ 4\alpha}\right\}, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} l & \alpha\, E \\ 4\mu & \theta \end{array} \right\rangle \\
&= c_3\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}}(\delta_{4\mu\ 4\alpha} + (-)^l \delta_{4\mu\ -4\alpha} - 2\Delta^l_{4\mu\ 4\alpha}) + \Delta^l_{4\mu\ 4\alpha+2}\right\}.
\end{aligned}
$$

其中 c_i 为归一化常数，分别为

$$
\begin{aligned}
&c_1 = \frac{1}{\sqrt{6 + 24\Delta^l_{4\alpha\ 4\alpha}}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{6 - 24\Delta^l_{4\alpha+2\ 4\alpha+2}}}, \\
&c_3 = \sqrt{\frac{2}{1 - \Delta^l_{4\alpha\ 4\alpha} + \Delta^l_{4\alpha+2\ 4\alpha+2} + 2\sqrt{3}\Delta^l_{4\alpha\ 4\alpha+2}}},
\end{aligned} \tag{7.60b}
$$

式 (7.60) 给出的变换系数在它们的各个不可约空间中是非正交超完备的，如

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha\, A_1 \\ a_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle = c_1^2\{6\delta_{4\alpha\ 4\beta} + +24\Delta^l_{4\alpha\ 4\beta}\},$$

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha\, A_2 \\ a_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle = c_2^2\{6\delta_{4\alpha+2\ 4\beta+2} - 24\Delta^l_{4\alpha+2\ 4\beta+2}\},$$

$$\left\langle \begin{matrix} \alpha\, E \\ \epsilon \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} \alpha\, E \\ \theta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \beta\, E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle \tag{7.60c}$$

$$= \frac{c_3^2}{4}\{\delta_{4\alpha\ 4\beta} + \delta_{4\alpha+2\ 4\beta+2} - 2\Delta^l_{4\alpha\ 4\beta}$$

$$+ 2\Delta^l_{4\alpha+2\ 4\beta+2} + 2\sqrt{3}\Delta^l_{4\alpha+2\ 4\beta} + 2\sqrt{3}\Delta^l_{4\alpha\ 4\beta+2}\}.$$

式 (7.58),(7.59),(7.60) 将变换系数用已知的 $\Delta^l_{m\,m'}$ 函数表示出来，对实际计算将是很方便的. 上述不同不可约表示的幺正变换系数是正交的. 而对 (7.60) 给出的幺正变换系数，在各个不可约空间中需进行正交化，从中选出一组正交归一完备的变换系数. 并可以用重复度控制正交化过程，以减少不必要的计算.

O 有子群 T, D_4, D_3, 先考虑 O 对四面体群 T 的约化. 已知 O 与 S_4 同构， T 与 S_4 的偶置换群同构. 其生成元可取为 C_2^{001}, $C_3^{1\,1\,1}$, 定义关系为

$$\begin{aligned} &(C_2^{0\,0\,1})^2 = E, \\ &(C_3^{1\,1\,1})^3 = E, \\ &(C_3^{1\,1\,1}C_2^{0\,0\,1})^2 = C_2^{0\,0\,1}(C_3^{1\,1\,1})^2. \end{aligned} \tag{7.61}$$

T 共有 12 个元素， 4 个类. 用带撇的符号表示其不可约表示，取 $\omega = \exp(\frac{2\pi \mathrm{i}}{3})$, 其特征标表见表 7.7. 可得 $O \supset T$ 约化规则为

$$
\begin{aligned}
&A_k = A_1', \quad k = 1, 2, \\
&E = A_2' \oplus A_3', \\
&T_k = T', \quad k = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{7.62}
$$

这是简单约化. T 的一维表示 A_1', A_2' 特征标即表示矩阵.

表 7.7 T 的特征标表

	K_1 1	K_2 3	K_3 4	K_4 4
A_1'	1	1	1	1
A_2'	1	1	ω	ω^2
A_3'	1	1	ω^2	ω
T'	3	-1	0	0

与 O 的表示一致，取表示 T' 中，生成元的表示矩阵为

$$
C_2^{0\,0\,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
C_3^{1\,1\,1} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}/2 & 1/\sqrt{2} & \mathrm{i}/2 \\ \mathrm{i}/\sqrt{2} & 0 & \mathrm{i}/\sqrt{2} \\ -\mathrm{i}/2 & -1/\sqrt{2} & \mathrm{i}/2 \end{pmatrix},
\tag{7.63a}
$$

考虑到归一化条件，可取相因子使非零幺正变换系数为

$$
\left\langle \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1' \\ a_1' \end{matrix} \right\rangle = 1, \quad k = 1, 2,
$$

$$
\left\langle \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2' \\ a_2' \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_3' \\ a_3' \end{matrix} \right\rangle = \mathrm{i}/\sqrt{2},
\tag{7.63b}
$$

$$\left\langle \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2' \\ a_2' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_3' \\ a_3' \end{matrix} \right\rangle = 1/\sqrt{2},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_k \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T' \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_k \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T' \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_k \\ \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T' \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = 1, \quad k = 1, 2. \tag{7.63c}$$

现考虑 O 对二面体群 D_4 的约化. D_4 的生成元可取为 $C_4^{0\,0\,1}$, 和 $C_2^{0\,1\,0}$. D_4 共有 8 个元素, 5 个类. 由表 7.3, 取 $\phi = \pi/2$, 可得其特征标表. 用带撇的符号表示 D_4 的不可约表示, 可得 $O \supset D_4$ 的约化规则为

$$\begin{aligned} &A_1 = A_1', \;\; A_2 = B_1', \\ &E = A_1' \oplus B_1', \;\; T_1 = A_2' \oplus E', \\ &T_2 = B_2' \oplus E', \end{aligned} \tag{7.64}$$

这全是简单约化. D_4 的一维表示 A_1', A_2', B_1', B_2' 特征标即表示矩阵. 在表示 E' 中, 生成元的表示矩阵取为

$$\begin{aligned} C_4^{0\,0\,1} &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \\ C_2^{0\,1\,0} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.65a}$$

考虑到归一化条件, 可取相因子使非零幺正变换系数为

$$\left\langle \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1' \\ a_1' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_1' \\ b_1' \end{matrix} \right\rangle = 1,$$

$$\left\langle \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_1' \\ b_1' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1' \\ a_1' \end{matrix} \right\rangle = 1, \tag{7.65b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ \epsilon' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2' \\ a_2' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ \theta' \end{matrix} \right\rangle = 1,$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_2 \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ \theta' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} B_2' \\ b_2' \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 \\ \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ \epsilon' \end{matrix} \right\rangle = 1. \tag{7.65c}$$

现考虑 O 对二面体群 D_3 的约化. D_3 的生成元可取为 $C_3^{1\ 1\ 1}$, 和 $C_2^{0\ -1\ 1}$. D_3 共有 6 个元素, 3 个类. 由表 7.2, 取 $\phi = 2\pi/3$, 可得其特征标表. 用带撇的符号表示 D_3 的不可约表示, 可得 $O \supset D_3$ 的约化规则为

$$\begin{aligned} &A_k = A_k', \ \ k = 1, 2, \\ &E = E', \ \ T_1 = A_2' \oplus E', \\ &T_2 = A_1' \oplus E'. \end{aligned} \tag{7.66}$$

一维表示 A_1', A_2' 特征标即为其表示矩阵. 在二维表示 E' 中, 生成元的表示矩阵为

$$C_3^{1\ 1\ 1} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

$$C_2^{0\ -1\ 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.67a}$$

考虑到归一化条件, 可取相因子使非零幺正变换系数为

$$\left\langle \begin{matrix} A_k \\ a_k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_k' \\ a_k' \end{matrix} \right\rangle = 1, \ \ k = 1, 2,$$

$$\left\langle \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ x' \end{matrix} \right\rangle = -\mathrm{i} \left\langle \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ x' \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.67b}$$

$$\left\langle \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ y' \end{matrix} \right\rangle = \mathrm{i} \left\langle \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E' \\ y' \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi}{3}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\left\langle\begin{array}{c}T_1\\1\end{array}\middle|\begin{array}{c}A_2'\\a_2'\end{array}\right\rangle=\left\langle\begin{array}{c}T_1\\\bar{1}\end{array}\middle|\begin{array}{c}A_2'\\a_2'\end{array}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_1\\0\end{array}\middle|\begin{array}{c}A_2'\\a_2'\end{array}\right\rangle=\frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{6}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_1\\1\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\x'\end{array}\right\rangle=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_1\\0\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\x'\end{array}\right\rangle=\frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{6}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_1\\\bar{1}\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\x'\end{array}\right\rangle=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_1\\1\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\y'\end{array}\right\rangle=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}\exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi}{3}\right),\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_1\\0\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\y'\end{array}\right\rangle=-\frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{6}}\exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi}{3}\right),\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_1\\\bar{1}\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\y'\end{array}\right\rangle=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}}\exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{7.67c}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\left\langle\begin{array}{c}T_2\\1\end{array}\middle|\begin{array}{c}A_1'\\a_1'\end{array}\right\rangle=\left\langle\begin{array}{c}T_2\\\bar{1}\end{array}\middle|\begin{array}{c}A_1'\\a_1'\end{array}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_2\\0\end{array}\middle|\begin{array}{c}A_1'\\a_1'\end{array}\right\rangle=\frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{6}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_2\\1\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\x'\end{array}\right\rangle=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_2\\0\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\x'\end{array}\right\rangle=\frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{6}},\\
&\left\langle\begin{array}{c}T_2\\\bar{1}\end{array}\middle|\begin{array}{c}E'\\x'\end{array}\right\rangle=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}},
\end{aligned}
\tag{7.67d}
$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} T_2 & E' \\ 1 & y' \end{array} \right\rangle = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}\right),$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} T_2 & E' \\ 0 & y' \end{array} \right\rangle = \frac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{6}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}\right), \tag{7.67e}$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} T_2 & E' \\ \bar{1} & y' \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}2\pi}{3}\right).$$

现考虑 O 不可约表示的直积，可求出不可约表示直积约化规则为

$$\begin{aligned}
&A_1 \otimes A_k = A_k, \quad A_k \otimes E = E, \quad k = 1, 2, \\
&A_1 \otimes T_k = T_k, \quad k = 1, 2, \\
&A_2 \otimes A_2 = A_1, \quad A_2 \otimes T_1 = T_2, \\
&A_2 \otimes T_2 = T_1, \quad E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus E, \\
&E \otimes T_k = T_1 \oplus T_2, \quad k = 1, 2, \\
&T_k \otimes T_k = A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2, \quad k = 1, 2, \\
&T_1 \otimes T_2 = A_2 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2.
\end{aligned} \tag{7.68}$$

由约化系数满足的方程 (7.20), 取 g_i 为 $C_4^{0\,0\,1}$, 可得约化系数的选择定则，取 g_i 为 $C_4^{0\,1\,0}$, 可得约化系数之间的关系，再考虑归一化，适当选择相因子，对 $A_j \otimes A_k$, 可取直积约化系数为 1. 对 $A_k \otimes E$, $A_j \otimes T_k$, $j, k = 1, 2$, 可得下面非零直积约化系数

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{cc|c} A_1 & E & E \\ a_1 & \epsilon & \epsilon \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} A_1 & E & E \\ a_1 & \theta & \theta \end{array} \right\rangle = 1, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & E & E \\ a_2 & \epsilon & \theta \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & E & E \\ a_2 & \theta & \epsilon \end{array} \right\rangle = 1,
\end{aligned} \tag{7.69a}$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} A_1 & T_k & T_k \\ a_1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} A_1 & T_k & T_k \\ a_1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{cc|c} A_1 & T_k & T_k \\ a_1 & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right\rangle = 1,$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & T_1 & T_2 \\ a_2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & T_1 & T_2 \\ a_2 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & T_1 & T_2 \\ a_2 & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right\rangle = 1, \tag{7.69b}$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & T_2 & T_1 \\ a_2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & T_2 & T_1 \\ a_2 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{cc|c} A_2 & T_2 & T_1 \\ a_2 & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right\rangle = 1.$$

对 $E \otimes E$, 可得以下非零直积约化系数

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & A_1 \\ \epsilon & \epsilon & a_1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & A_1 \\ \theta & \theta & a_1 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & A_2 \\ \theta & \epsilon & a_2 \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & A_2 \\ \epsilon & \theta & a_2 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.69c}$$

$$-\left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & E \\ \epsilon & \epsilon & \theta \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & E \\ \theta & \theta & \theta \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & E \\ \theta & \epsilon & \epsilon \end{array} \right\rangle$$

$$= -\left\langle \begin{array}{cc|c} E & E & E \\ \epsilon & \theta & \epsilon \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

对 $E \times T_k$, 可得以下非零直积约化系数

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_1 \\ \theta & 0 & 0 \end{array} \right\rangle = -1, \tag{7.69d}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_1 \\ \theta & 1 & 1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_1 \\ \theta & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right\rangle = \frac{1}{2}, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_1 \\ \epsilon & 1 & \bar{1} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_1 \\ \epsilon & \bar{1} & 1 \end{array} \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_2 \\ \epsilon & 0 & 0 \end{array} \right\rangle = 1, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_2 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_2 \\ \epsilon & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{2}, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_2 \\ \theta & 1 & \bar{1} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_1 & T_2 \\ \theta & \bar{1} & 1 \end{array} \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_1 \\ \theta & 0 & 0 \end{array} \right\rangle = -1, \qquad\qquad (7.69\text{e}) \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_1 \\ \epsilon & 1 & 1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_1 \\ \epsilon & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right\rangle = \frac{1}{2}, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_1 \\ \theta & 1 & \bar{1} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_1 \\ \theta & \bar{1} & 1 \end{array} \right\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_2 \\ \theta & 0 & 0 \end{array} \right\rangle = 1, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_2 \\ \theta & 1 & 1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_2 \\ \theta & \bar{1} & \bar{1} \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{2}, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_2 \\ \epsilon & 1 & \bar{1} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} E & T_2 & T_2 \\ \epsilon & \bar{1} & 1 \end{array} \right\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

对 $T_j \times T_k$, 可得以下非零直积约化系数

$$
\left\langle \begin{array}{cc|c} T_1 & T_1 & A_1 \\ 1 & \bar{1} & a_1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} T_1 & T_1 & A_1 \\ \bar{1} & 1 & a_1 \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad (7.69\text{f})
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 0 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ \bar{1} & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
&\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ 0 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_1 \\ \bar{1} & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\
&\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle \\
&\qquad = -\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_1 \\ a_1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}
\tag{7.69g}
$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$-\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$-\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$-\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 0 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \bar{1} & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.69h}$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ 0 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \bar{1} & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle$$

$$= -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_2 \\ a_2 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \epsilon \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E \\ \theta \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 0 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \bar{1} & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.69i}$$
$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$-\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \bar{1} & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 1 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 0 & \bar{1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = -\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \bar{1} & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_2 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7.4 二十面体群 I

I 是保持正二十面体不变的对称群，正二十面体如图 7.2. O 点是正二十面体的中心，它有十二个角顶，三十条棱边和二十个正三角形表面. 其角顶用 $A, B, \cdots$ 等标出，以下将用 C_5^A 标记过角顶 A 的五阶轴，用 $C_2^{CF'}$ 标记过 $\overline{CF'}$ 线段中点的二阶轴，用 C_3^{ABC} 标记过三角形 $\triangle ABC$ 中心的三阶轴等等. 取 OA 为 z 轴方向，O 与线段 $\overline{CF'}$ 中点连线为 y 轴方向. 用几何方法可以求出所有 I 的六个五阶轴，十五个二阶轴和十个三阶轴的方向余弦. 已知转角为 ψ，转轴方向余弦为 $\boldsymbol{n}=(n_x, n_y, n_z)$ 的转动算符 $\exp(-\mathrm{i}\psi \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{J})$ 等于

$$
\begin{pmatrix}
n_x^2(1-\cos\psi)+\cos\psi & n_xn_y(1-\cos\psi)-n_z\sin\psi & n_xn_z(1-\cos\psi)+n_y\sin\psi \\
n_xn_y(1-\cos\psi)+n_z\sin\psi & n_y^2(1-\cos\psi)+\cos\psi & n_yn_z(1-\cos\psi)-n_x\sin\psi \\
n_xn_z(1-\cos\psi)-n_y\sin\psi & n_yn_z(1-\cos\psi)+n_x\sin\psi & n_z^2(1-\cos\psi)+\cos\psi
\end{pmatrix}
\tag{7.70}
$$

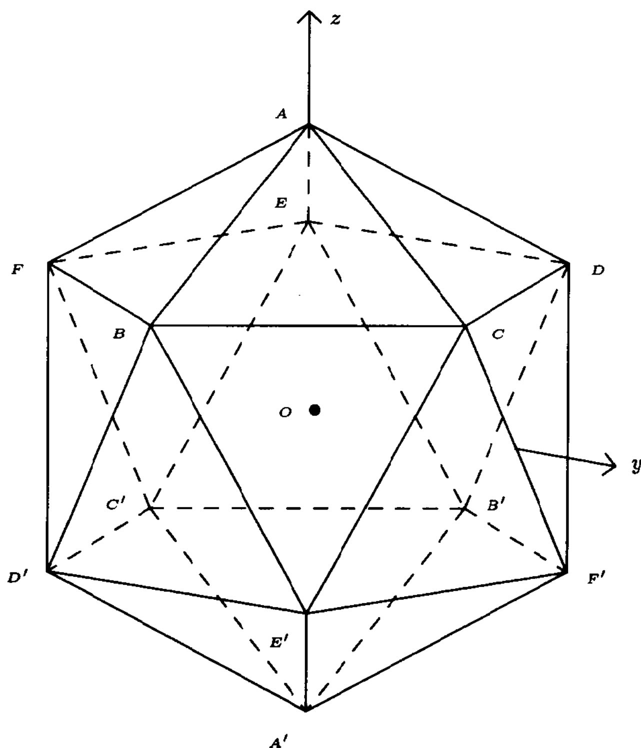


图 7.2 正二十体图

利用 (7.70) 可以求出所有转轴对应的转动算符，如

$$
C_2^{AB} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},
$$

$$
C_5^A = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} & -\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

等等，也就是写出了 I 的全部元素.

可以取 C_5^A, C_2^{AB} 为 I 的生成元，定义关系为

$$
\begin{aligned}
&(C_5^A)^5 = E, \\
&(C_2^{AB})^2 = E, \\
&(C_5^A C_2^{AB})^3 = (C_2^{AB} C_5^A)^3 = E.
\end{aligned} \tag{7.71}
$$

I 共有五个类，其类算符为

$$
\begin{aligned}
K_1 &= E, \\
K_2 &= C_5^A + C_5^B + C_5^C + C_5^D + C_5^E + C_5^F \\
&\quad + (C_5^A)^4 + (C_5^B)^4 + (C_5^C)^4 + (C_5^D)^4 + (C_5^E)^4 + (C_5^F)^4, \\
K_3 &= (C_5^A)^2 + (C_5^B)^2 + (C_5^C)^2 + (C_5^D)^2 + (C_5^E)^2 + (C_5^F)^2 \\
&\quad + (C_5^A)^3 + (C_5^B)^3 + (C_5^C)^3 + (C_5^D)^3 + (C_5^E)^3 + (C_5^F)^3, \\
K_4 &= C_2^{AB} + C_2^{AC} + C_2^{AD} + C_2^{AE} + C_2^{AF} + C_2^{BC} + C_2^{CD} + C_2^{DE} \\
&\quad + C_2^{EF} + C_2^{FB} + C_2^{BD'} + C_2^{BF'} + C_2^{CE'} + C_2^{CF'} + C_2^{DF'}, \\
K_5 &= C_3^{ABC} + C_3^{ACD} + C_3^{ADE} + C_3^{AEF} + C_3^{AFB} + C_3^{BCE'} \\
&\quad + C_3^{CE'F'} + C_3^{CDF'} + C_3^{DF'B'} + C_3^{DEB'} + (C_3^{ABC})^2 \\
&\quad + (C_3^{ACD})^2 + (C_3^{ADE})^2 + (C_3^{AEF})^2 + (C_3^{AFB})^2 + (C_3^{BCE'})^2 \\
&\quad + (C_3^{CE'F'})^2 + (C_3^{CDF'})^2 + (C_3^{DF'B'})^2 + (C_3^{DEB'})^2.
\end{aligned} \tag{7.72}
$$

可以证明 I 与对称群 S_5 的偶置换子群 A_5 同构. 取 $a = C_5^A$,

表 7.8 I 的轴与 A_5 元素间的同构对应

I的轴	轴的方向余弦	用生成元表示	A_5元素
C_5^A	$(0,0,1)$	a	(12345)
C_5^B	$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{5}\right)$	bab	(14352)
C_5^C	$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	ba^3	(13254)
C_5^D	$\left(-\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	aba^2	(15243)
C_5^E	$\left(-\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5},-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	a^2ba	(13542)
C_5^F	$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5},-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	a^3b	(15324)
C_3^{ABC}	$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 3\cdot 5}},\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2\cdot 3}},\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	ba^4	(153)
C_3^{ACD}	$\left(-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3\cdot 5}},\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}},\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	aba^3	(142)
C_3^{ADE}	$\left(-\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{3\cdot 5}},0,\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	a^2ba^2	(253)
C_3^{AEF}	$\left(-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3\cdot 5}},-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}},\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	a^3ba	(143)
C_3^{AFB}	$\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2\cdot 3\cdot 5}},-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2\cdot 3}},\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	a^4b	(254)
$C_3^{BCE'}$	$\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3\cdot 5}},\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	ba^2ba^4	(234)
$C_3^{CE'F'}$	$\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 3\cdot 5}},\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	ba^2ba^3	(152)
$C_3^{CDF'}$	$\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 3\cdot 5}},\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	ba^3ba^2	(345)
$C_3^{DF'B'}$	$\left(-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{3\cdot 5}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	ba^3ba	(132)

续 表 7.8

I的轴	轴的方向余弦	用生成元表示	A_5元素
$C_3^{DEB'}$	$\left(-\sqrt{\frac{2\cdot(5+\sqrt{5})}{3\cdot 5}},0,\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{3\cdot 5}}\right)$	aba^3ba	(145)
C_2^{AB}	$\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}},0,\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	b	(12)(34)
C_2^{AC}	$\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 5}},\frac{1}{2},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	aba^4	(23)(45)
C_2^{AD}	$\left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}},\frac{\sqrt{5}-1}{4},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	a^2ba^3	(15)(34)
C_2^{AE}	$\left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}},\frac{-\sqrt{5}+1}{4},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	a^3ba^2	(12)(45)
C_2^{AF}	$\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{2\cdot\cdot 2\cdot 5}},-\frac{1}{2},\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	a^4ba	(15)(23)
C_2^{BC}	$\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 5}},\frac{1}{2},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	aba^2b	(14)(25)
C_2^{CD}	$\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}},\frac{\sqrt{5}+1}{4},\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{2\cdot 5}}\right)$	aba^3ba^3	(13)(25)
C_2^{DE}	$\left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 5}},0,\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	$a^2ba^3ba^2$	(13)(34)
C_2^{EF}	$\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}},\frac{-\sqrt{5}-1}{4},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	a^3ba^3ba	(24)(35)
C_2^{FB}	$\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 5}},-\frac{1}{2},\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 5}}\right)$	ba^2ba	(14)(35)
$C_2^{BD'}$	$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2}},\frac{-\sqrt{5}+1}{4},0\right)$	ba^2ba^3b	(25)(34)
$C_2^{BE'}$	$\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2}},\frac{\sqrt{5}-1}{4},0\right)$	aba^2ba^3b	(12)(35)
$C_2^{CE'}$	$\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2}},\frac{\sqrt{5}+1}{4},0\right)$	$a^2ba^2ba^3b$	(13)(45)
$C_2^{CF'}$	$(0,1,0)$	$ba^2ba^3ba^2$	(14)(23)
$C_2^{DF'}$	$\left(-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\cdot 2\cdot 2}},\frac{\sqrt{5}+1}{4},0\right)$	ba^2ba^3ba	(15)(24)

$b=C_2^{AB}$, 表 7.8 给出 I 各个轴的方向余弦和他们与 A_5 元素之间的同构对应关系.

由 A_5 的乘法可以容易算出 I 的乘法表和类乘法常数，如

$$\begin{aligned}
K_2K_2 &= 12K_1 + 5K_2 + K_3 + 3K_5,\\
K_2K_3 &= K_2 + K_3 + 4K_4 + 3K_5,\\
K_2K_4 &= 5K_3 + 4K_4 + 3K_5,\\
K_2K_5 &= 5K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 3K_5,\\
K_3K_3 &= 12K_1 + K_2 + 5K_3 + 3K_5,\\
K_3K_4 &= 5K_2 + 4K_4 + 3K_5,\\
K_3K_5 &= 5K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 3K_5,\\
K_4K_4 &= 15K_1 + 5K_2 + 5K_3 + 2K_4 + 3K_5,\\
K_4K_5 &= 5K_2 + 5K_3 + 4K_4 + 6K_5,\\
K_5K_5 &= 20K_1 + 5K_2 + 5K_3 + 8K_4 + 7K_5.
\end{aligned} \tag{7.73}$$

利用式 (7.3),(7.4), 可以求出其特征标表如表 7.9. 表中 K_i 下方数是 K_i 类元素个数 n_i.

表 7.9 I 的特征标表

	K_1 1	K_2 12	K_3 12	K_4 15	K_5 20
A	1	1	1	1	1
T_1	3	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	-1	0
T_2	3	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-1	0
U	4	-1	-1	0	1
V	5	0	0	1	-1

与 $SO(3)$ 的表示一致，取一维表示 A 表示空间的基为 $\left|\begin{matrix}A\\0\end{matrix}\right\rangle$,

则生成元 C_5^A, C_2^{AB} 的表示矩阵即其特征标.

与 $SO(3)$ 的表示一致，取三维不可约西表示 T_1 空间的基为 $\left| \begin{array}{c} T_1 \\ k \end{array} \right\rangle$, $k = 1, 0, -1$. 取 $\omega = \exp(\frac{-i2\pi}{5})$, $x = (1+\sqrt{5})/2$, 生成元的表示矩阵可取为

$$\begin{aligned} C_5^A &= \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \\ C_2^{AB} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -x & -\sqrt{2} & 1-x \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 1-x & \sqrt{2} & -x \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.74}$$

与 $SO(3)$ 的表示一致，取三维不可约西表示 T_2 空间的基为 $\left| \begin{array}{c} T_2 \\ k \end{array} \right\rangle$, $k = 2, 0, -2$, 生成元的表示矩阵可取为

$$\begin{aligned} C_5^A &= \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-2} \end{pmatrix}, \\ C_2^{AB} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{2} & -x \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} \\ -x & -\sqrt{2} & 1-x \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.75}$$

与 $SO(3)$ 的表示一致，取四维不可约西表示 U 空间的基为 $\left| \begin{array}{c} U \\ k \end{array} \right\rangle$, $k = 2, 1, -1, -2$, 生成元的表示矩阵可取为

$$C_5^A = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-2} \end{pmatrix},$$

$$C_2^{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 1-x & -x & 1 \\ 1-x & 1 & -1 & -x \\ -x & -1 & 1 & 1-x \\ 1 & -x & 1-x & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.76}$$

与 $SO(3)$ 的表示一致，取五维不可约酉表示 V 空间的基为 $\left| \begin{matrix} V \\ k \end{matrix} \right\rangle$, $k = 2, 1, 0, -1, -2$, 生成元的表示矩阵可取为

$$C_5^A = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-2} \end{pmatrix},$$

$$C_2^{AB} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x+1 & 2x & \sqrt{6} & 2x-2 & 2-x \\ 2x & 2-x & -\sqrt{6} & -x-1 & 2-2x \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 2x-2 & -x-1 & \sqrt{6} & 2-x & -2x \\ 2-x & 2-2x & \sqrt{6} & -2x & x+1 \end{pmatrix}, \tag{7.77}$$

利用 (7.28), 可以求出 $SO(3)$ 的不可约表示 l 到 I 不可约表示的重复度，结果见表 7.10. 表中每一行给出 l 值， l 表成 $30i+k$ 形式.

用 $SO(3) \supset SO(2)$ 或用 $SO(3) \supset I$ 分类不可约表示 l 空间态

表 7.10 $SO(3) \supset I$ 的重复度表

l	A	T_1	T_2	U	V
$30i$	$i+1$	$3i$	$3i$	$4i$	$5i$
$30i+1$	i	$3i+1$	$3i$	$4i$	$5i$
$30i+2$	i	$3i$	$3i$	$4i$	$5i+1$
$30i+3$	i	$3i$	$3i+1$	$4i+1$	$5i$
$30i+4$	i	$3i$	$3i$	$4i+1$	$5i+1$
$30i+5$	i	$3i+1$	$3i+1$	$4i$	$5i+1$
$30i+6$	$i+1$	$3i+1$	$3i$	$4i+1$	$5i+1$
$30i+7$	i	$3i+1$	$3i+1$	$4i+1$	$5i+1$
$30i+8$	i	$3i$	$3i+1$	$4i+1$	$5i+2$
$30i+9$	i	$3i+1$	$3i+1$	$4i+2$	$5i+1$
$30i+10$	$i+1$	$3i+1$	$3i+1$	$4i+1$	$5i+2$
$30i+11$	i	$3i+2$	$3i+1$	$4i+1$	$5i+2$
$30i+12$	$i+1$	$3i+1$	$3i+1$	$4i+2$	$5i+2$
$30i+13$	i	$3i+1$	$3i+2$	$4i+2$	$5i+2$
$30i+14$	i	$3i+1$	$3i+1$	$4i+2$	$5i+3$
$30i+15$	$i+1$	$3i+2$	$3i+2$	$4i+2$	$5i+2$
$30i+16$	$i+1$	$3i+2$	$3i+1$	$4i+2$	$5i+3$
$30i+17$	i	$3i+2$	$3i+2$	$4i+2$	$5i+3$
$30i+18$	$i+1$	$3i+1$	$3i+2$	$4i+3$	$5i+3$
$30i+19$	i	$3i+2$	$3i+2$	$4i+3$	$5i+3$
$30i+20$	$i+1$	$3i+2$	$3i+2$	$4i+2$	$5i+4$
$30i+21$	$i+1$	$3(i+1)$	$3i+2$	$4i+3$	$5i+3$
$30i+22$	$i+1$	$3i+2$	$3i+2$	$4i+3$	$5i+4$
$30i+23$	i	$3i+2$	$3(i+1)$	$4i+3$	$5i+4$
$30i+24$	$i+1$	$3i+2$	$3i+2$	$4(i+1)$	$5i+4$
$30i+25$	$i+1$	$3(i+1)$	$3(i+1)$	$4i+3$	$5i+4$
$30i+26$	$i+1$	$3(i+1)$	$3i+2$	$4i+3$	$5(i+1)$
$30i+27$	$i+1$	$3(i+1)$	$3(i+1)$	$4(i+1)$	$5i+4$
$30i+28$	$i+1$	$3i+2$	$3(i+1)$	$4(i+1)$	$5(i+1)$
$30i+29$	i	$3(i+1)$	$3(i+1)$	$4(i+1)$	$5(i+1)$

时，这两种标记间幺正变换系数可以用下法求出．例如 I 的不可约表示 T_1，将幺正变换系数简写成 $\left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ T_1 \\ k \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ k \end{matrix} \right\rangle$，

$$\left| \begin{matrix} T_1 \\ k \end{matrix} \right\rangle = \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle, \quad k = 1, 0, -1. \tag{7.78a}$$

注意

$$\begin{aligned} C_5^A &= \exp\left(\frac{-\mathrm{i}2\pi J_z}{5}\right), \\ C_2^{AB} &= \exp\left(\frac{-\mathrm{i}\theta J_y}{2}\right)\exp(-\mathrm{i}\pi J_z)\exp\left(\frac{\mathrm{i}\theta J_y}{2}\right) = \exp(-\mathrm{i}\theta J_y)\exp(\mathrm{i}\pi J_z), \end{aligned} \tag{7.79}$$

其中 $\sin\theta = 2/\sqrt{5}$，$\cos\theta = 1/\sqrt{5}$.

用生成元 C_5^A 作用于 (7.78a)，可得变换系数的选择定则，即

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{\mu} \left\langle \begin{matrix} l \\ 5\mu+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ 5\mu+1 \end{matrix} \right\rangle, \\ \left| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{\mu} \left\langle \begin{matrix} l \\ 5\mu \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ 5\mu \end{matrix} \right\rangle, \\ \left| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle &= \sum_{\mu} \left\langle \begin{matrix} l \\ 5\mu-1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ \bar{1} \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} l \\ 5\mu-1 \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned} \tag{7.78b}$$

用生成元 C_2^{AB} 作用于 (7.78b)，可得变换系数满足的方程，如

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu} \left\langle \begin{matrix} l \\ 5\mu+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle (-)^{5\mu+1} d^l_{5\mu'+1\ 5\mu+1}(\theta) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{5}} \left\langle \begin{matrix} l \\ 5\mu'+1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} T_1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle, \end{aligned} \tag{7.80a}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mu}\left\langle \begin{array}{c|c} l & T_1 \\ 5\mu+1 & 1 \end{array}\right\rangle (-)^{5\mu+1} d^l_{5\mu'\ 5\mu+1}(\theta) \\
&\quad = -\sqrt{\frac{2}{5}}\left\langle \begin{array}{c|c} l & T_1 \\ 5\mu' & 0 \end{array}\right\rangle, \\
&\sum_{\mu}\left\langle \begin{array}{c|c} l & T_1 \\ 5\mu+1 & 1 \end{array}\right\rangle (-)^{5\mu+1} d^l_{5\mu'-1\ 5\mu+1}(\theta) \\
&\quad = \frac{1-x}{\sqrt{5}}\left\langle \begin{array}{c|c} l & T_1 \\ 5\mu'-1 & -1 \end{array}\right\rangle, \\
&\sum_{\mu}\left\langle \begin{array}{c|c} l & T_1 \\ 5\mu+1 & 1 \end{array}\right\rangle (-)^{5\mu+1} d^l_{5\mu'+2\ 5\mu+1}(\theta) = 0, \\
&\sum_{\mu}\left\langle \begin{array}{c|c} l & T_1 \\ 5\mu+1 & 1 \end{array}\right\rangle (-)^{5\mu+1} d^l_{5\mu'-2\ 5\mu+1}(\theta) = 0.
\end{aligned}
\tag{7.80b}
$$

幺正变换系数满足的方程涉及 $d^l_{m\,m'}(\theta)$ 的计算，将 (7.79) 给出的 θ 值代入 (7.6)，可计算出 $d^l_{m\,m'}(\theta)$，从而得到所有幺正变换系数满足的方程，以解出要求的幺正变换系数. 这在 l 值大时计算量会相当大.

用与上同样方法，对 $l=0,1,2,3$，直接计算 $d^l_{m\,m'}$，代入已知的表示矩阵，再考虑归一化条件，可得 A, T_1, V 的幺正变换系数为

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{c|c} 0 & A \\ 0 & 0 \end{array}\right\rangle = 1, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} 1 & T_1 \\ m & m \end{array}\right\rangle = 1, \quad m = 1, 0, -1, \\
&\left\langle \begin{array}{c|c} 2 & V \\ m & m \end{array}\right\rangle = 1, \quad m = 2, 1, 0, -1, -2.
\end{aligned}
\tag{7.81}
$$

规定相因子使 $\left\langle \begin{array}{c|c} l & T_2 \\ l & k \end{array}\right\rangle > 0$，可得 T_2 的变换系数为

$$\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & T_2 \\ 3 & -2 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} 3 & T_2 \\ -3 & 2 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & T_2 \\ -2 & -2 \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & T_2 \\ 2 & 2 \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad (7.82)$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & T_2 \\ 0 & 0 \end{array} \right\rangle = 1,$$

同样规定相因子使 $\left\langle \begin{array}{c|c} l & U \\ l & k \end{array} \right\rangle > 0$, 可得 U 的变换系数为

$$\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & U \\ 3 & -2 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} 3 & U \\ -3 & 2 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & U \\ -2 & -2 \end{array} \right\rangle = -\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & U \\ 2 & 2 \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}, \qquad (7.83)$$

$$\left\langle \begin{array}{c|c} 3 & U \\ -1 & -1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c|c} 3 & U \\ 1 & 1 \end{array} \right\rangle = 1.$$

I 有子群 T, D_5. 四面体群 T 的生成元可取为 C_2^{AB}, C_3^{ACD}, 满足定义关系 (7.61). 用 A_1', A_2', A_3', T' 标记 T 的不可约表示，则 I 对四面体群 T 的约化规则为

$$\begin{aligned} &A = A_1', \ T_1 = T', \\ &T_2 = T', \ U = A_1' \oplus T', \\ &V = A_2' \oplus A_3' \oplus T'. \end{aligned} \qquad (7.84)$$

这是简单约化. $I \supset T$ 的幺正变换系数，在取定 T 的表示矩阵后，可通过生成元的作用，解线性方程而得出.

D_5 的生成元可取为 $C_5^A, C_2^{BD'}$, 满足定义关系 (7.25). 用 A_1',

A'_2, E'_1, E'_2 表示 D_5 的不可约表示，可得 $I \supset D_5$ 的约化规则为

$$\begin{aligned}
&A = A'_1, \ T_1 = A'_2 \oplus E'_1, \\
&T_2 = A'_2 \oplus E'_2, \ U = E'_1 \oplus E'_2, \\
&V = A'_1 \oplus E'_1 \oplus E'_2.
\end{aligned} \tag{7.85}$$

这是简单约化． $I \supset D_5$ 的幺正变换系数，在取定 D_5 的表示矩阵后，可通过生成元的作用，解线性方程而得出．

现考虑 I 不可约表示的直积，利用特征标表，可求出不可约表示直积约化规则为

$$\begin{aligned}
&A \otimes A = A, \ A \otimes T_k = T_k, \ k = 1, 2, \\
&A \otimes U = U, \ A \otimes V = V, \\
&T_1 \otimes T_1 = A \oplus T_1 \oplus V, \ T_1 \otimes T_2 = U \oplus V, \\
&T_1 \otimes U = T_2 \oplus U \oplus V, \ T_1 \otimes V = T_1 \oplus T_2 \oplus U \oplus V, \\
&T_2 \otimes T_2 = A \oplus T_2 \oplus V, \ T_2 \otimes U = T_1 \oplus U \oplus V, \\
&T_2 \otimes V = T_1 \oplus T_2 \oplus U \oplus V, \ U \otimes U = A \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus U \oplus V, \\
&U \otimes V = T_1 \oplus T_2 \oplus U \oplus 2V, \ V \otimes V = A \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus 2U \oplus 2V.
\end{aligned} \tag{7.86}$$

由约化系数满足的方程 (7.20)，取 g_i 为 C_5^A，可得约化系数的选择定则，取 g_i 为 C_2^{AB}，可得约化系数间关系，再考虑归一化，适当选择相因子，便可求出不可约表示直积约化系数．例如求 $T_1 \otimes T_2$ 到 U 的约化系数，便经下具体过程．

$$\left| \begin{matrix} U \\ k \end{matrix} \right\rangle = \sum_{k_1, k_2} \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ k_1 & k_2 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} U \\ k \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ k_1 & k_2 \end{matrix} \right\rangle, \tag{7.87}$$

其中 $k_1 = 1, 0, -1$, $k_2 = 2, 0, -2$, $k = 2, 1, -1, -2$. 用 C_5^A 作用于 (7.87) 式两端可得选择定则 $k = k_1 + k_2 + 5\mu$, μ 为整数．具体为

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{array}{c}U\\2\end{array}\right\rangle &= \left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\0 & 2 & 2\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\0 & 2\end{array}\right\rangle\\
&\quad+\left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\-1 & -2 & 2\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\-1 & -2\end{array}\right\rangle,\\
\left|\begin{array}{c}U\\1\end{array}\right\rangle &= \left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\-1 & 2 & 1\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\-1 & 2\end{array}\right\rangle\\
&\quad+\left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\1 & 0 & 1\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\1 & 0\end{array}\right\rangle,\\
\left|\begin{array}{c}U\\-1\end{array}\right\rangle &= \left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\1 & -2 & -1\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\1 & -2\end{array}\right\rangle\\
&\quad+\left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\-1 & 0 & -1\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\-1 & 0\end{array}\right\rangle,\\
\left|\begin{array}{c}U\\-2\end{array}\right\rangle &= \left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\0 & -2 & -2\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\0 & -2\end{array}\right\rangle\\
&\quad+\left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\1 & 2 & -2\end{array}\right\rangle\left|\begin{array}{cc}T_1 & T_2\\1 & 2\end{array}\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{7.88}
$$

用 C_2^{AB} 作用于 (7.88) 态 $\left|\begin{array}{c}U\\2\end{array}\right\rangle$ 的两端，注意 $\sqrt{5}=2x-1$，比较系数得约化系数满足下列方程：

$$
\begin{aligned}
&(1-2x)\left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\0 & 2 & 2\end{array}\right\rangle\\
&=(1-x)\left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\0 & 2 & 2\end{array}\right\rangle-\sqrt{2}x\left\langle\begin{array}{cc|c}T_1 & T_2 & U\\-1 & -2 & 2\end{array}\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{7.89a}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-2x)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle \\
&\quad = -\sqrt{2}x\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right\rangle + \left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle, \\
&(x-3)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right\rangle \\
&\quad = \sqrt{2}(1-x)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right\rangle + (x+1)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle, \\
&(x-3)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle \\
&\quad = -2\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right\rangle + \sqrt{2}(x-1)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle, \\
&(-x-2)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right\rangle \\
&\quad = \sqrt{2}x\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right\rangle + (2-x)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle, \\
&(-x-2)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right\rangle \\
&\quad = 2\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right\rangle + \sqrt{2}x\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle, \\
&(2x-1)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right\rangle \\
&\quad = -x\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right\rangle + \sqrt{2}(1-x)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle, \\
&(2x-1)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right\rangle \\
&\quad = \sqrt{2}(x-1)\left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right\rangle + \left\langle\begin{array}{cc|c} T_1 & T_2 & U \\ -1 & -2 & 2 \end{array}\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{7.89b}
$$

方程 (7.89) 只能决定约化系数间相对关系. 利用归一化条件

$$\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} U \\ 2 \end{matrix} \right\rangle^2 + \left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ -1 & -2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} U \\ 2 \end{matrix} \right\rangle^2 = 1.$$

可以决定约化系数的绝对值.

约化系数的相因子可以用下面办法规定. 由于按群链 $SO(3) \supset SO(2)$ 和 $SO(3) \supset I$ 分类 $SO(3)$ 不可约表示 l 的基分别为 $\left| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle$ 和 $\left| \begin{matrix} l \\ \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$, 其中 Γ, γ 为 I 的不可约表示和表示空间的分类指标. 利用紧致李群表示的完全可约性, 有

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ \Gamma \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2, m} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \gamma_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l_1 \\ m_1 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} \Gamma_2 \\ \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l_2 \\ m_2 \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle. \end{aligned} \tag{7.90}$$

其中 $\left\langle \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\rangle$ 是 $SO(3)$ 的 CG 系数, 而 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \gamma_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l_1 \\ m_1 \end{matrix} \right\rangle$, 等是 $SO(3) \supset SO(2)$ 和 $SO(3) \supset I$ 标记不可约表示 l 基间幺正变换系数, 在 $l_1, l_2, l \leq 3$ 时已由式 (7.81),(7.82),(7.83) 给出. 所以约化标量因子 $\left\langle \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ \Gamma \end{matrix} \right\rangle$ 与 I 的约化系数 $\left\langle \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$ 的乘积是固定的. 若规定

$$\left\langle \begin{matrix} l_1 & l_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l \\ \Gamma \end{matrix} \right\rangle > 0, \qquad \text{当} l_1, l_2, l \leq 3, \ l_2 \leq l_1, \tag{7.91a}$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} l_1 & l_2 & l \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma \end{array} \right\rangle = (-)^{l_1+l_2-l} \left\langle \begin{array}{cc|c} l_2 & l_1 & l \\ \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma \end{array} \right\rangle, \text{ 其他情况,} \tag{7.91b}$$

则由 CG 系数对称性可得 I 的直积约化系数对称性

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma \end{array} \right\rangle. \tag{7.92}$$

例如在 (7.90) 式中，代入适当的幺正变换系数和 CG 系数有

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 \\ T_2 & T_1 & U \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 \\ T_2 & T_1 & U \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} T_2 & T_1 & U \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{7.93a}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 \\ T_2 & T_1 & U \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 \\ T_2 & T_1 & U \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} T_2 & T_1 & U \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{7.93b}$$

利用归一化条件和 (7.91) 式对相因子的规定，可得

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 \\ T_2 & T_1 & U \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}. \tag{7.94}$$

此时约化系数的相因子是完全确定的，即

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{cc|c} T_2 & T_1 & U \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \right\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \left\langle \begin{array}{cc|c} T_2 & T_1 & U \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \tag{7.95}$$

恒等表示 A 与其他表示直积约化系数为

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{array}{cc|c} A & A & A \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle = 1, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} A & T_k & T_k \\ 0 & m & m \end{array} \right\rangle = 1, \quad k = 1, 2, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} A & U & U \\ 0 & m & m \end{array} \right\rangle = 1, \quad m = 2, 1, -1, -2, \\
&\left\langle \begin{array}{cc|c} A & V & V \\ 0 & m & m \end{array} \right\rangle = 1, \quad m = 2, 1, 0, -1, -2,
\end{aligned} \tag{7.96}$$

在表示矩阵如 (7.74),(7.75),(7.76),(7.77) 时， I 不可约表示直积约化系数由表 7.11 到表 7.20 给出.

表 7.11 约化系数 $\left\langle \begin{array}{cc|c} T_1 & T_1 & \Gamma \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma \end{array} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = A$	$\Gamma = T_1$	$\Gamma = V$
1	1	2	0	0	1
1	0	1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	1	1	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
1	−1	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
0	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
−1	1	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
−1	0	−1	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	−1	−1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
−1	−1	−2	0	0	1

表 7.15 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} T_2 & T_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = A$	$\Gamma = T_2$	$\Gamma = V$
2	0	2	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	2	2	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
−2	−2	1	0	0	−1
2	−2	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
0	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
−2	2	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
2	2	−1	0	0	1
−2	0	−2	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	−2	−2	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$

表 7.16 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} T_2 & U \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = T_1$	$\Gamma = U$	$\Gamma = V$
−2	−1	2	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	2	2	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
−2	−2	1	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{12}}$
0	1	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
2	−1	1	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{4}}$
−2	2	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
2	−2	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
2	2	−1	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$
0	−1	−1	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
−2	1	−1	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
2	1	−2	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	−2	−2	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$

表 7.14 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} T_1 & V \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma=T_1$	$\Gamma=T_2$	$\Gamma=U$	$\Gamma=V$
-1	-2	2	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0
0	2	2	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
1	1	2	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{4}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
-1	2	1	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	1	1	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
1	0	1	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
-1	1	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	0
1	-1	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
1	-2	-1	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	-1	-1	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
-1	0	-1	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
1	2	-2	0	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0
0	-2	-2	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
-1	-1	-2	0	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{4}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$

表 7.12 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = U$	$\Gamma = V$
0	2	2	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
−1	−2	2	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
−1	2	1	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
1	0	1	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	0	0	0	−1
1	−2	−1	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
−1	0	−1	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	−2	−2	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
1	2	−2	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

表 7.13 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} T_1 & U \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = T_2$	$\Gamma = U$	$\Gamma = V$
0	2	2	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
1	1	2	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$
−1	−2	2	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
−1	2	1	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	1	1	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
−1	1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
1	−1	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
1	−2	−1	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0	−1	−1	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
0	−2	−2	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
−1	−1	−2	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$
1	2	−2	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{4}}$

表 7.17 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} T_2 & V \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = T_1$	$\Gamma = T_2$	$\Gamma = U$	$\Gamma = V$
-2	-1	2	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
2	0	2	0	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	2	2	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
-2	-2	1	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{4}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
2	-1	1	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	0
0	1	1	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
2	-2	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	0	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0
-2	2	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
2	2	-1	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{4}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
-2	1	-1	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0
0	-1	-1	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
2	1	-2	0	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
-2	0	-2	0	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$
0	-2	-2	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$

表 7.18 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} U & U \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = A$	$\Gamma = T_1$	$\Gamma = T_2$	$\Gamma = U$	$\Gamma = V$
-1	-2	2	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
-2	-1	2	0	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
1	1	2	0	0	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
-2	-2	1	0	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
2	-1	1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
-1	2	1	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
2	-2	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
1	-1	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
-1	1	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
-2	2	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
2	2	-1	0	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
-2	1	-1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
1	-2	-1	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{6}}$
1	2	-2	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
2	1	-2	0	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$
-1	-1	-2	0	0	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

表 7.19 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} U & V \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma=T_1$	$\Gamma=T_2$	$\Gamma=U$	$\Gamma=V$	$\Gamma=V'$
-1	-2	2	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
-2	-1	2	0	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$
2	0	2	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
1	1	2	0	$-\sqrt{\frac{9}{20}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$
-2	-2	1	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$
2	-1	1	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
1	0	1	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
-1	2	1	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	0	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$
2	-2	0	$-\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
1	-1	0	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
-1	1	0	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
-2	2	0	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
2	2	-1	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$\sqrt{\frac{1}{24}}$
-2	1	-1	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
-1	0	-1	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
1	-2	-1	$\sqrt{\frac{1}{20}}$	0	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$
1	2	-2	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
2	1	-2	0	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$
-2	0	-2	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$-\sqrt{\frac{1}{4}}$
-1	-1	-2	0	$\sqrt{\frac{9}{20}}$	$-\sqrt{\frac{2}{15}}$	$-\sqrt{\frac{3}{8}}$	$-\sqrt{\frac{1}{24}}$

表 7.20 约化系数 $\left\langle \begin{matrix} V & V \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \Gamma \\ \gamma \end{matrix} \right\rangle$

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma = A$	$\Gamma = T_1$	$\Gamma = T_2$	$\Gamma = U$	$\Gamma = U'$	$\Gamma = V$	$\Gamma = V'$
−1	−2	2	0	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	0	$\sqrt{\frac{7}{15}}$
−2	−1	2	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	0	$\sqrt{\frac{7}{15}}$
2	0	2	0	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{70}}$
1	1	2	0	0	0	0	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\sqrt{\frac{4}{105}}$
0	2	2	0	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{70}}$
−2	−2	1	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	0	$-\sqrt{\frac{7}{15}}$
2	−1	1	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\sqrt{\frac{4}{105}}$
1	0	1	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{14}}$	$-\sqrt{\frac{8}{35}}$
0	1	1	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{14}}$	$-\sqrt{\frac{8}{35}}$
−1	2	1	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\sqrt{\frac{4}{105}}$
2	−2	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{70}}$
1	−1	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0	$\sqrt{\frac{1}{14}}$	$\sqrt{\frac{8}{35}}$

续　表 7.20

γ_1	γ_2	γ	$\Gamma=A$	$\Gamma=T_1$	$\Gamma=T_2$	$\Gamma=U$	$\Gamma=U'$	$\Gamma=V$	$\Gamma=V'$
0	0	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	0	0	0	$-\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{18}{35}}$
−1	1	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	0	0	$\sqrt{\frac{1}{14}}$	$\sqrt{\frac{8}{35}}$
−2	2	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{10}}$	0	0	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{70}}$
2	2	−1	0	0	0	0	$\sqrt{\frac{8}{15}}$	0	$\sqrt{\frac{7}{15}}$
−2	1	−1	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\sqrt{\frac{4}{105}}$
−1	0	−1	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{14}}$	$-\sqrt{\frac{8}{35}}$
0	−1	−1	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{14}}$	$-\sqrt{\frac{8}{35}}$
1	−2	−1	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\sqrt{\frac{4}{105}}$
1	2	−2	0	0	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	0	$-\sqrt{\frac{7}{15}}$
2	1	−2	0	0	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{30}}$	0	$-\sqrt{\frac{7}{15}}$
−2	0	−2	0	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{70}}$
−1	−1	−2	0	0	0	0	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\sqrt{\frac{4}{105}}$
0	−2	−2	0	0	$-\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$-\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{70}}$

参考文献

[1] Chen J Q. Group Representation Theory for Physicists. Singapore: World Scientific, 1989

[2] 韩其智，孙洪洲. 群论. 北京：北京大学出版社， 1987

[3] Lomont J S. Applications of Finite Groups. New York and London: Academic Press, 1959

[4] 马中骐. 物理学中的群论. 北京：科学出版社， 1998

[5] Miller W J. Symmetry Groups and Their Applications. New York and London: Academic Press, 1972 (中译本，对称群及其应用. 栾德怀等译. 北京：科学出版社， 1981)

[6] 唐敖庆等. 配位场理论方法. 北京：科学出版社， 1979

[General Information]
书名=李代数李超代数及在物理中的应用
作者=孙洪洲　韩其智
页数=446
SS号=10192213
DX号=
出版日期=1999年05月第1版
出版社=北京大学出版社